



Essai de modélisation endogène du progrès technique

Georges Daw

► To cite this version:

Georges Daw. Essai de modélisation endogène du progrès technique : Quels enseignements sur l'apport futur des TIC à la croissance économique ?. 2009. halshs-00374075v3

HAL Id: halshs-00374075

<https://shs.hal.science/halshs-00374075v3>

Preprint submitted on 18 Oct 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Essai de modélisation du progrès technique endogène

Quels enseignements sur l'apport futur des TIC à la croissance économique ?

Introduction

La diffusion des produits tic dans une économie pose au moins 2 questions:

La question relative à l'ampleur passée ou actuelle de leur contribution à la croissance qui est du ressort de l'exercice de comptabilité de la croissance et à laquelle sont consacrés les chapitres 3 et 4 de nos travaux.

Et la question relative à l'apport futur de cette contribution à la croissance économique que le présent chapitre tente d'approcher.

Quelles sont les forces qui orientent le progrès technique d'une économie en direction d'un type de bien ou service ou d'un autre ?

Pourquoi durant la décennie 90, le progrès technique fut relativement plus vigoureux dans l'industrie des produits tic ?

Il est tentant de retrouver les faits largement admis et confirmés par l'exercice de la comptabilité de la croissance c'est-à-dire le rôle prépondérant du secteur des nouvelles technologies dans l'inflexion de la croissance économique ou de la productivité du travail durant cette période.

Comment dans le même temps fournir un fondement microéconomique aux résultats de stabilité des parts factorielles constatés sur longue période en y incluant du progrès technique endogène ?

Ce cadre devra permettre de répondre à une incertitude sur l'avenir de la contribution des produits tic à la valeur ajoutée, à savoir précisément, la question portant sur une éventuelle décroissance continue de celle-ci¹ qui résulterait d'une saturation progressive en produits TIC de nature à amener l'élasticité-prix de la demande en ces produits à un niveau inférieur à 1 alors qu'elle est actuellement au-dessus de 1.

Nous revenons sur l'explication de ce phénomène ainsi que sur la difficulté de lever cette incertitude lors de la première section de ce chapitre.

Ce chapitre vise d'abord à réexaminer dans quelle mesure la stabilité supposée ou empirique sur long terme des parts factorielles pourrait avoir un fondement microéconomique à travers un essai de modélisation du progrès technique endogène. Simultanément, il se veut une tentative de réponse aux questions relevant de l'incertitude sur l'impact futur des produits TIC dans les économies.

¹Voir Oulton.N [2002] *"ICT and Productivity Growth in the UK"*, Bank of England, pp 46-48 ou Cette.G, Mairesse.J et Kocoglu.Y [2004] "Diffusion des TIC et croissance potentielle", Revue d'Economie Politique, pp 77-97 pour une lecture de certaines incertitudes liées à l'ampleur et à la longueur de la diffusion des TIC dans les économies.

Nous proposons, dans un modèle où la source de la croissance réside dans l'apparition de nouveaux biens et services, d'examiner cette question en partant de l'idée que la diffusion progressive des nouvelles technologies, que celle-ci soit appréhendée en termes de PGF, en *capital deepening* ou par leur combinaison devrait se traduire par une amélioration de la productivité du travail.

Il est tentant de travailler avec une fonction Cobb-Douglas, comme cela est le cas dans l'exercice de comptabilité de la croissance mais avec une élasticité de substitution toujours exactement unitaire², on peut être très sceptique quant à son pouvoir d'expliquer les changements à court terme dans les parts factorielles.³

De même supposer comme le fait la littérature⁴ que le progrès technique est d'emblée harrodien est une perspective compatible avec le fait stylisé sur la stabilité des parts factorielles mais élimine l'occurrence d'un progrès technique sur le facteur capital. C'est ce que font pourtant les démonstrations théoriques des modèles cherchant à prouver que le progrès technique de long terme serait exclusivement harrodien. S'il est admis que le progrès technique est effectivement harrodien, pourquoi tout le progrès technique serait-il tout le temps harrodien ?

Dit autrement pourquoi le progrès technique net, entendu comme l'effet net du progrès sur l'un des facteurs capital ou travail, serait de nature à améliorer exclusivement le facteur travail ?

C'est du même ordre d'idées que de se demander pourquoi la maximisation du profit des firmes impliquerait d'orienter le changement technique vers le seul facteur travail⁵.

Une Cobb-Douglas se révélerait inopportune pour analyser des fluctuations de court-terme qui sont réelles aussi bien historiquement comme l'illustre la hausse relative

² Pour l'ensemble de ces auteurs, l'élasticité de substitution entre capital et travail est inférieure à l'unité et se situe entre 0,5 et 0,8 selon les périodes couvertes par l'estimation. On peut citer:

Arrow, K. [1961] "Capital Labor Substitution and Economic efficiency", *Review of Economics and Statistics*, pp 225-250.

Kendrick, J.W and Sato, R. [1963] "Factor Prices, Productivity and Economic Growth", *American Economic Review*, vol LIII, pp 974-1003.

David, P.A and Van De Klundert, T. [1965] "Biased Efficiency Growth and Capital Labor Substitution in the US Economy 1899-1960", *American Economic Review*, vol LV pp 357-94.

Eisner, R. and Nadiri, M.I. [1968] "Investment Behavior and the Neoclassical Theory", *Review of Economics and Statistics*, pp 369-382.

Lucas, R.E [1969] "Labor-Capital in the US Manufacturing", In *the Taxation of Income from Capital*, Edited by Habegger, A. and Bailey, M.J Washington, DC: The Brookings Institutions, pp 223-274.

Sato, R. [1970] "The Estimation of Biased Technical Progress and the Production Function", *International Economic Review*, vol 11, n°2.

Antras, P. [2001] "Is the US Aggregate Production Function Cobb-Douglas ?" , *New Estimates of the Elasticity of Substitution*, MIT Mimeo.

³ Remarquons que la méthode de la comptabilité de la croissance utilise des Cobb-Douglas avec des élasticités de la production par rapport aux facteurs calculées comme des parts *a posteriori* de ces facteurs dans l'output. Bien que ce ne soit pas sa finalité, cet exercice est pratiquement démuné de fondements microéconomiques. La démarche de ce chapitre ici inversée en ce qu'elle n'est qu'une simple investigation théorique.

⁴ Cf pour une démonstration des effets de la neutralité harrodiennne sur la répartition des facteurs Schubert, K. [1996], *Macroéconomie Comportements et Croissance*, Paris Vuibert, Encadré 11 p 107.

En outre, le lecteur pourra consulter Barro, R.J et Sala, i. Martin, X. [1996], *Economic Growth* Mc Graw-Hill, New York pp 61-62 qui démontre que l'obtention d'une croissance d'état régulier nécessite soit l'utilisation d'une fonction de forme Cobb-Douglas, soit l'hypothèse *a priori (ste)* de neutralité harrodiennne.

⁵ Noter que dans une logique de substitutions factorielles, un biais de progrès technique vers le travail améliore la productivité du capital alors qu'un biais de progrès technique vers le capital améliore la productivité du travail.

de la part du capital dans plusieurs pays au lendemain de la seconde guerre mondiale qu'expérimentalement c'est-à-dire malgré l'impact des modifications de politique économique (taxation du capital, imposition du travail...) sur la redistribution.

Aussi-et cela devrait être toujours souligné-elle met en évidence la stabilité des parts factorielles dans le cadre précis de l'exercice de comptabilité de la croissance à long terme dont elle constitue l'un des outils de base. L'exercice de comptabilité de la croissance s'intéresse à l'apport de chaque facteur pris isolément. L'agrégation des différents apports aboutit au chiffre de croissance totale.

Or la contribution de chaque facteur est d'abord fondamentalement reliée aux interactions avec les autres facteurs mais elle est également la résultante des actions individuelles des différents agents (consommateurs, producteurs de biens finals, producteurs de biens intermédiaires, chercheurs, Etat...).

Ces deux interactions n'apparaissent qu'en bout de chaîne au niveau de l'exercice de la comptabilité de la croissance, ce qui – mais ce n'est pas son but ultime – lui ôte la prétention de se livrer, à elle seule, à l'établissement de prévisions de croissance et de ses déterminants ou même d'impact de politiques économiques sur la croissance.

Le modèle que nous proposons d'adapter aux produits TIC répond au souci d'esquisser ces questions et lève dans le même temps les deux *a priori* théoriques (utilisation d'une Cobb-Douglas et hypothèse de progrès technique *ad hoc*) dans un cadre où les nouveaux produits tic consistent en des biens intermédiaires introduits dans l'économie par un secteur dédié à la recherche dans ce domaine.

Une fois inventés, ces biens intermédiaires sont produits par le secteur des biens intermédiaires correspondant qui aura auparavant acheté une licence au secteur de la recherche. Les biens intermédiaires ainsi produits sont utilisés dans des secteurs de biens finals qui fourniront subséquemment aux consommateurs les biens finals correspondants. Dans cette perspective, il est donc nécessaire d'abandonner les hypothèses "*a prioristes*" c'est-à-dire l'utilisation d'une fonction comme la Cobb-Douglas mais également le fait que le progrès technique est harrodien dès le départ.

Avant de présenter l'organisation de ce chapitre, il nous paraît utile d'une part de faire une remarque sur l'aspect de la modélisation adoptée pour décrire le progrès technique et d'autre part d'indiquer en quoi cette modélisation est pertinente.

Tel que cela a été déjà dit, le but est trouver une modélisation plus riche dans le sens où elle s'affranchirait de toute hypothèse "*a prioriste*" sur la direction du progrès technique. Elle utiliserait donc une fonction de production autre que la Cobb-Douglas pour permettre d'étudier des changements des parts factorielles notamment à court terme -comme l'illustrent les figures a et b un peu plus en avant- sans pour autant sacrifier la stabilité sur long terme des parts factorielles dans le revenu.

La hausse régulière des niveaux de salaires confirmée par les travaux de comptabilité de la croissance et notamment sur la fin des années 1990 est un fait.

L'amélioration de la productivité du travail (respectivement du capital) ou de la même façon, le progrès technique portant sur le facteur travail (respectivement capital) peut se modéliser de deux manières:

- soit comme il est le plus largement fait, par l'introduction de techniques améliorant directement la productivité du travail. C'est ce qu'on voit dans la plupart des modèles de croissance avec progrès technique, où il suffit d'affecter au facteur travail un

nombre positif comme dans l'expression suivante où le progrès serait harrodien:
 $Y = F(K, aL)$. On parle de "*labor enhancing*" ou de "*capital enhancing*".

- soit en l'introduction de nouveaux biens ou services utilisateurs du facteur travail ou intensifs en facteur travail, ce qui renvoie à une même réalité c'est-à-dire à l'introduction de biens et services dont l'utilisation sollicite le facteur travail et permettrait en retour d'améliorer sa productivité.

Cet impact sur la productivité du travail est le propre des biens et services rentrant dans ce qu'il conviendra d'appeler "biens intensifs en travail". C'est cette façon de faire⁶ qu'empruntera ce chapitre. On parle de "*labor using*" ou de "*capital using*".

Les biens et services TIC, en rentrant dans cette 2^{ème} configuration de la modélisation auraient un effet "labor using" améliorant la productivité du travail. Nous adoptons donc cette configuration pour étudier les propriétés du comportement de court et de long terme d'une économie qui comprend un secteur générique produisant des biens et services TIC et de façon plus englobante tous les biens et services finals intensifs en travail et un secteur Hors-TIC produisant des biens et services Hors-TIC et de façon plus englobante tous les biens et services intensifs en capital.

Un bien intermédiaire intensif en travail doit vérifier qu'il réduit le coût du facteur travail ou ce qui revient au même qu'il augmente la productivité du facteur travail.

Un bien intermédiaire intensif en capital doit vérifier qu'il réduit le coût du facteur capital ou ce qui revient au même qu'il augmente la productivité du facteur capital.

Dire à quoi correspondrait concrètement cette classification n'est pas chose aisée.

Concrètement, les exemples que nous prenons pour l'illustrer sont également applicables à la 1^{ère} façon de faire. La différence se situe simplement au niveau de la modélisation de l'économie, en commençant par ses fonctions de production. Etant moins standard, on caractérisera, légèrement plus loin, la modélisation "*factor using*".

En 1971, aux Etats-Unis, le rapport entre un travailleur appartenant au 90^{ème} décile le plus élevé en termes de salaires et le travailleur ayant le salaire le plus élevé parmi le premier décile le plus bas était de 265. En 1995, il est de 366. Il y a un large consensus sur l'apport du progrès technique à cette évolution.

Le progrès technique vers la fin le XX^{ème} siècle, en particulier la diffusion des TIC, promeut les travailleurs qualifiés, remplace plusieurs activités préalablement assurées grâce aux travailleurs moins qualifiés et accroît la demande de qualifications.

⁶ Ce choix ne modifie pas les conclusions de nos développements ultérieurs.

Acemoglu, D. [2003] "*Labor and Capital Augmenting Technical Change*", *Journal of European Economic Association*, montre (voir section V-C) comment l'utilisation de l'autre option (qui pour rappel, consiste non plus en l'introduction de biens utilisant le travail ou le capital mais en l'introduction de biens améliorant ces deux facteurs) modifie les équations de production du secteur des biens finals (voir les équations (5) de ce chapitre). Cette autre option correspond à la littérature relative, d'une part aux modèles d'élargissement des variétés de biens intermédiaires à la Romer, P. [1990] "*Endogenous Technical Change*", *Journal of Political Economy*, vol. XCIII, pp 71-102 et d'autre part aux modèles d'élargissement de la qualité des biens existants à la Aghion, P. et Howitt, P. [1992] "*A Model of Growth Through Creative Destruction*", *Econometrica*, vol. 60, n°2, pp 323-351. Acemoglu, D. [2003] montre également (voir toujours sa section V-C) que les résultats du modèle sont invariants à la modélisation adoptée.

Les ordinateurs, les matériels de communication, les imprimantes et les produits TIC de façon générale ont comme but ultime l'augmentation ou l'amélioration non pas d'une production propre, par exemple comme l'acier ou l'énergie mécanique (cf exemples ci-dessous) mais de permettre au facteur travail de produire plus et/ou mieux un ensemble de biens et de services.

C'est à ce titre que nous les rangeons dans la catégorie des biens intensifs en travail et toutes les fois qu'un bien ou un service s'apparente davantage à ces attributs (son introduction avantage la productivité du travail, n'a pas de production propre...), il sera considéré dans la catégorie "biens intermédiaires intensifs en travail".

Prenons par exemple le processus Bessemer qui est un procédé d'affinage industriel de la fonte pour l'obtention de l'acier et qui en raison de son bas coût de production permit à partir de 1860 d'augmenter la production industrielle de façon significative. Ce type d'invention n'affecte pas la productivité du travail dans la mesure où la production d'acier relève du convertisseur Bessemer et est l'unité de mesure (au numérateur) de la productivité de celui-ci.

Prenons également durant la révolution industrielle, l'exemple de la machine à vapeur, qui est un moteur thermique à combustion externe, et qui transforme l'énergie thermique contenue dans la vapeur d'eau qui arrive par sa ou ses chaudières, en énergie mécanique. L'unité de production est l'énergie mécanique. La machine à vapeur est supplantée de nos jours par le moteur à explosion et le moteur électrique dans la fourniture d'énergie mécanique.

Ces deux derniers exemples d'invention et leurs caractéristiques permettent de les ranger dans la catégorie des biens intensifs en capital.

Historiquement ces inventions ont en dénominateur commun, la thèse de Habakkuk. H.J [1962]⁷ selon laquelle la conjugaison de la rareté du facteur travail et des salaires élevés a conduit à de nombreuses inventions durant le XIX^{ème} siècle aux Etats-Unis par rapport à la Grande Bretagne. Durant cette période, d'importantes destructions d'emplois qualifiés eurent lieu et furent remplacés par des machines. Puis, une fois introduites, ces inventions ne constituèrent plus tellement une voie de remplacement du facteur travail -qui a pourtant continué à se renchérir- mais de substitutions intergénérationnelles d'inventions de plus en plus efficaces. Ce sont donc des biens de capital qui remplacent d'anciens biens de capital et qui possèdent de meilleurs rendements productifs (ou réduisent le coût du capital).

Reparlons à présent et comme annoncé de la modélisation "*factor using*".

La production d'un bien intermédiaire intensif en travail nécessitera du facteur travail alors que celle d'un bien intensif en capital requerra du facteur capital.

La production totale du bien "final" intensif en travail nécessitera une combinaison de divers biens intermédiaires intensifs en travail.

Le raisonnement est similaire pour le facteur capital.

⁷ Pour une discussion sur la catégorie des inventions visant à réduire le coût du capital, on peut voir "*American and British Technology in the Nineteenth Century: Search for Labor Saving Inventions*", Cambridge University Press, pp 157-159.

La production de l'économie dans son ensemble se présente quant à elle comme une combinaison de la production totale du bien "final" intensif en travail et de la production totale du bien "final" intensif en capital.

L'avantage d'une telle modélisation⁸ (voir notamment les équations (5),(6)et (8) qui montrent les sources de production des biens intermédiaires intensifs en capital et en travail) sont de rendre plus intuitive la nature du progrès technique qui prévaudra en régime équilibré et de façon générale son analyse.

En effet,deux sources sont à l'origine de la production de biens intensifs en capital (voir équation (5)): l'accumulation de capital (équation (6) et le progrès technique sur le capital (équation (8)) tandis qu'il n'y a qu'une seule source augmentant la production de biens intensifs en travail (voir équation (5)) à savoir le progrès technique portant sur le travail (équation (8)).

Dès lors,pour être en régime de croissance équilibrée,il est nécessaire qu'il n'y ait pas de progrès technique net en direction du capital compte tenu de l'impossibilité d'accumulation du facteur travail.

Ces modèles quelle que soit la spécification retenue (*factor using* ou *enhancing*) permettent,à défaut de calculer le poids comptable du progrès technique,de cerner l'impact redistributif de son existence.S'ils ne constituent pas un moyen d'évaluer les contributions des différents facteurs à la croissance (ce n'est,cette fois,pas leur but ultime),ils présentent néanmoins l'avantage de considérer le progrès technique comme une manifestation endogène au comportement des agents.

Les gains de performances ont ici un coût pour l'entreprise.

L'absence d'une telle considération est une des limites fortes des modèles de croissance néoclassiques dans la lignée de Solow et que nous utiliserons par la suite dans le cadre de l'exercice de comptabilité de la croissance (cf Chapitres 3 et 4)

Le rapprochement entre la présente modélisation et l'exercice de comptabilité de la croissance qui opère à travers le poids des TIC dans la croissance est alors facile à mettre en évidence.

Une première variable proxy du modèle théorique (la productivité du travail) qui varie selon l'abondance relative de ces produits dans l'économie,amène des changements qui portent sur une deuxième variable proxy (la part relative du facteur travail par rapport au capital).Selon les variations de cette deuxième variable,le poids des TIC dans la croissance est plus ou moins élevé,ce qui est censé être confirmé quantitativement par l'exercice de comptabilité de la croissance.

L'exercice de comptabilité de la croissance montre que la diffusion des produits TIC se traduit par une contribution comptable croissante à la croissance économique.

Cela revient au même,de dire que cette diffusion améliore la productivité du travail,sa proxy et par voie de conséquence,la part relative du travail par rapport au capital (la proxy du poids des tic dans le PIB).

⁸ Nous démontrons de façon détaillée (voir Daw.G [2004] "Le progrès technique induit éclaire-t-il exhaustivement la stabilité *a prioriste* de la répartition factorielle de long terme ?" Mémoire M2 Paris 1 Panthéon-Sorbonne pp 84-85) comment représente-t-on la modélisation "*factor enhancing*" puis en quoi elle modifie à chaque fois les équations de la présente modélisation.

Les lecteurs intéressés peuvent se procurer ces précisions sur demande.

Dans un modèle où le moteur de la croissance consiste à introduire ce type de biens dans l'économie, le comportement de la part relative du capital (ou du travail) autour de son niveau de non-arbitrage sur la direction du progrès technique fournit une première réponse sur celui du degré de leur utilisation dans l'appareil productif à court ou à long terme. Cette première réponse renseigne alors sur la direction du progrès technique.

La part relative du capital à son niveau de non-arbitrage (ou de façon équivalente ce que nous avons défini comme une "intensité capitaliste d'indifférence") constitue donc un indicateur de référence. Sa stabilité dans un contexte où le progrès technique est endogène et l'élasticité de substitution est inférieure à l'unité, permet de répondre à la difficile question de l'apport futur des TIC à la croissance économique.

Une première section présente la spécificité du cadre d'analyse et fournit quelques indications préalables au développement de celui-ci. On y trouve les deux logiques sous-jacentes de maximisation du profit des entreprises et de progrès technique induit par les prix des facteurs.

Les sections 2 et 3 présentent respectivement les caractéristiques de l'ensemble des agents et leurs comportements.

La section 4 est une caractérisation du régime de croissance équilibrée du modèle.

Dans les sections suivantes, nous nous intéresserons au régime transitionnel du modèle. Un régime d'équilibre aurait une portée limitée si la propriété de stabilité était déficiente. Le fait de se retrouver avec une abondance relative des biens TIC par rapport aux biens Hors-TIC qui est différente de celle d'équilibre, entraîne-t-il un retour vers la position d'équilibre ou une divergence ?

Cette analyse correspondant à l'étude du régime transitionnel fera donc l'objet des sections 5 et 6. Cette analyse nécessitera de représenter le modèle par un système d'équations linéarisables autour de l'équilibre. La section 6 montre la raison pour laquelle le système initial d'équations décrivant le comportement du modèle n'est pas linéarisable. La section 6 fournit une solution pour remédier à ce problème et montre que le système est localement stable lorsque l'élasticité de substitution est inférieure à l'unité. Cette conclusion permettra de tirer une prédiction théorique quant à l'apport des TIC à la croissance économique.

La dernière section revient sur une importante hypothèse du modèle, en l'occurrence la formulation de la frontière des possibilités d'innovation de l'économie. Le but étant d'apprécier la robustesse de nos conclusions sur la stabilité de l'équilibre décrite dans les deux précédentes sections. Nous verrons que la frontière des possibilités d'innovations ne peut prendre n'importe quelle forme.

1. Le modèle

1.1 Présentation générale

Pédagogiquement, il peut-être intéressant, avant de présenter le cadre d'analyse, de rappeler dans l'encadré ci-dessous, les implications de l'hypothèse de progrès technique *a priori* harrodien sur la répartition du revenu entre les facteurs de production. Compte tenu de la stabilité empirique de la part relative du travail par rapport au capital, cette hypothèse est une justification *a priori* d'un progrès harrodien.

Encadré 1.1 : Neutralité *a priori* du progrès technique au sens de Harrod et répartition factorielle

Nous rappelons les effets du progrès technique neutre au sens de Harrod sur la répartition factorielle c'est-à-dire les poids du facteur travail et du facteur capital dans le produit ou ce qui revient au même, le poids relatif de l'un des facteurs en termes de l'autre.

Soit une fonction de production, à rendements constants (homogène de degré 1 précisément) avec progrès technique neutre au sens de Harrod :

$$Y_t = F(K_t, A_t L_t)$$

Puisque cette fonction est homogène de degré 1, on peut aussi l'écrire comme :

$$\frac{Y_t}{K_t} = F\left(1, \frac{A_t L_t}{K_t}\right) \text{ et en notant } \mu = \frac{A_t L_t}{K_t} \text{ et } F(1, \mu) = f(\mu) \text{ on a alors :}$$

$$\frac{Y_t}{K_t} = f(\mu)$$

Par définition, la neutralité au sens de Harrod signifie que toutes choses étant égales par ailleurs (que le coût réel du capital $\left(\frac{r}{p}\right)$ soit constant), seule la productivité du facteur travail est modifiée, ce qui veut dire que la productivité du facteur capital reste alors inchangée.

Cela exige alors que $\frac{1}{f(\mu)}$ et par conséquent $\mu = \frac{A_t L_t}{K_t}$ restent inchangés.

Comme déjà définie, la répartition factorielle s'écrit :

$$\sigma_K = \frac{\frac{r_t K_t}{p_t Y_t}}{\frac{w_t L_t}{p_t Y_t}} = \frac{r_t K_t}{w_t L_t} \text{ Ce ratio est simplement la part relative du capital.}$$

(On retrouvera cette part relative du capital dans les développements ultérieurs: cf équation (26))

Avec l'hypothèse de rémunération des facteurs à leur productivité marginale⁹, la part relative du capital devient:

$$\sigma_K = \frac{\frac{\partial F}{\partial K_t} K_t}{\frac{\partial F}{\partial L_t} L_t}$$

Ecrivons comme usuellement les productivités marginales en fonction de $f(\mu)$:

$$\frac{\partial F}{\partial K_t} = \frac{\partial Y_t}{\partial K_t} = \frac{\partial}{\partial K_t} (K_t F(1, \mu)) = \frac{\partial}{\partial K_t} K_t f(\mu) = f(\mu) + K_t \frac{\partial}{\partial K_t} f(\mu) = f(\mu) + K_t f'(\mu) \mu'$$

$$\frac{\partial F}{\partial K_t} = f(\mu) + K_t f'(\mu) \left(-\frac{A_t L_t}{K_t^2} \right) = f(\mu) - \mu f'(\mu)$$

$$\frac{\partial F}{\partial L_t} = \frac{\partial}{\partial L_t} (K_t f(\mu)) = K_t \frac{\partial}{\partial L_t} f(\mu) = A_t f'(\mu)$$

C'est à ce stade qu'il est important de rappeler qu'à la différence du facteur travail, le facteur capital peut s'accumuler. C'est pourquoi d'ailleurs les modèles de croissance exogène supposent d'emblée l'existence de progrès technique harrodien qui est compatible avec le fait stylisé sur la répartition stable de la rémunération relative du facteur capital.

Pour le voir clairement, observons la formule $\mu = \frac{A_t L_t}{K_t}$:

μ peut demeurer constante même en présence de progrès technique sur le facteur travail (harrodien). En effet cela exigerait seulement que le taux de progrès harrodien se réalise aux mêmes taux que l'accumulation du capital.

En ce cas, en supposant la population active inchangée, le numérateur évolue au même rythme que le dénominateur. En revanche, à supposer que nous fûmes partis de l'hypothèse de progrès technique solowien, $\mu' = \frac{A_t K_t}{L_t}$ ne saurait être constante

sauf à considérer ce qui est invraisemblable, que la population active croisse plus rapidement que le taux de croissance et de l'accumulation et du progrès technique sur le facteur capital.

En comparant les deux productivités marginales, et donc sous l'hypothèse que μ constante, on en déduit que la productivité marginale du capital reste bien constante. Par contre la productivité marginale du facteur travail évolue au même rythme que le progrès technique. Cette amélioration de la productivité du travail autorise, pour un

⁹ Les hypothèses de rendements d'échelle constants ou de concurrence pure et parfaite de long terme permettent de justifier théoriquement cette rémunération des facteurs à leurs productivités marginales.

Empiriquement et à un niveau agrégé des variables, il est généralement admis une élasticité relative du capital au travail d'1/2. L'hypothèse de rendements d'échelle constant a l'avantage de permettre notamment d'estimer la part de rémunération du facteur capital (plus difficile à obtenir que la part du facteur travail), en calculant d'abord la part de la masse salariale dans le revenu, et en prenant ensuite son complément à l'unité pour évaluer la part de rémunération du facteur capital.

Pour de plus amples détails notamment à un niveau désagrégé des facteurs se reporter au chapitre 1.

même niveau de production (sur une même isoquante) d'utiliser moins de facteur travail mais mieux rémunéré, ce qui est de nature à laisser inchangé le dénominateur de la part relative du capital.

Exprimons la part relative du facteur capital en fonction de $f(\mu)$:

$$\sigma_K = \frac{A_t f'(\mu) L_t}{(f(\mu) - \mu f'(\mu)) K_t} = \frac{\mu f'(\mu)}{f(\mu) - \mu f'(\mu)}$$

Etant donné la constance supposée et possible (par rapport à du progrès solowien ou hicksien) de μ , la part relative du capital reste inchangée et donc la part de rémunération de chaque facteur dans le produit aussi.

On voit que la neutralité au sens de Harrod, lorsque la fonction de production est homogène de degré 1 et que le coût réel du capital est donné maintient la répartition factorielle stable et améliore le salaire réel.

Mais elle ne maintient pas fixe le rapport capital/travail utilisé dans la production.

Ce type d'évolution concorde avec le consensus théorique et empirique de la croissance économique de long terme tels que les décrivent respectivement le modèle de Solow et les faits stylisés de Kaldor en 1961.

Pour clore ce développement, faisons une remarque sur le taux d'augmentation de la productivité que la démonstration et les propos ci-dessus figent aux taux A_t .

Ils ne font en effet pas allusion au phénomène de "*capital deepening*".

Même s'il s'est accentué dans la deuxième moitié des années 1990, le rapport capital équipement des entreprises à leur valeur ajoutée est sur une tendance haussière depuis le milieu des années 1960. Cet enrichissement de la croissance économique en capital s'explique par la baisse du prix relatif de ces biens et notamment les TIC.

Mais la perception de ce phénomène n'est pas possible à partir des calculs du ratio capital/valeur ajoutée en valeur.

Par ailleurs, la majorité des modèles de croissance théoriques usuels considèrent un seul secteur de production alors qu'en raison des rythmes différenciés de progrès technique selon les secteurs, il serait pertinent d'en considérer deux: l'un producteur de capital traditionnel, l'autre producteur de produits TIC, ce dernier expérimentant une baisse tendancielle de son prix relativement au premier secteur.

Cette remarque permettrait d'envisager alors la substitution capital TIC-travail.

En réalité donc, si l'on envisage le phénomène de substitution factorielle, non pris en compte dans ce développement, on peut observer un phénomène de "*capital deepening*" en présence de progrès technique harrodien. En effet, comme le facteur capital TIC est devenu relativement moins cher que le facteur travail, on peut substituer du capital TIC au travail.

La question est de savoir l'impact de cette substitution sur la part relative du capital. En partant de la formule de la part relative du capital, on peut dire que le numérateur augmente (plus de capital est utilisé pour produire) et donc le dénominateur diminue, ce qui fait augmenter la part relative du capital mais pas seulement. La question subsidiaire porte sur l'effet du "*capital deepening*" sur les salaires.

La substitution du capital TIC au travail a pour effet d'améliorer la productivité du facteur travail en sus de l'effet du progrès technique harrodien.

Dans le cas où les biens sont complémentaires, il n'y a pas de "*capital deepening*".

Mais ce dernier cas reste théorique.

En effet, empiriquement, si le ratio capital total/PIB reste plutôt constant en valeur, il n'en est pas de même du ratio en volume. Cela s'explique par une part de plus en plus élevée du capital TIC dans le capital total, ce qui provient d'une substitution du capital TIC à la fois au capital traditionnel mais aussi au facteur travail.

Il nous faut par conséquent une fonction de production plus flexible afin de ne pas contraindre d'emblée le comportement des agents de notre modèle. Acemoglu.D [2003]¹⁰ utilise une fonction plus générale permettant l'existence de biais de progrès technique.

$$Y = F(MK, NL)$$

Lorsque le progrès technique porte sur le facteur capital, seul M augmente. Comme nous venons de le dire, les biais de progrès technique sont principalement modélisés de deux façons :

Soit par l'introduction de nouveaux biens et services intensifs en ces facteurs c'est-à-dire dont la production et l'utilisation sollicite relativement plus ces facteurs, soit par l'introduction de nouvelles techniques de production améliorant directement la productivité de ces facteurs.

On sait ce que cela signifie ne serait-ce qu'en se rappelant par exemple le sens qui en est donné dans le modèle suédois¹¹ des échanges internationaux:

Un bien ou un service est dit intensif en un facteur donné lorsque qu'il est requis d'utiliser relativement plus de ce facteur dans sa fabrication.

C'est l'idée de proportion des facteurs:

En présence de deux facteurs de production, le capital et le travail et deux biens A et B qui valent chacun 1 € une fois produits, le bien A est réputé relativement plus intensif en capital si sa fabrication requiert 30 centimes d'€ que celle de B n'en requiert que 20.

Le modèle qui s'inspire d'Acemoglu.D [2003] utilise la première modélisation et suppose qu'un biais de progrès technique sur le capital par exemple, implique l'augmentation du nombre M de biens intensifs en capital mais l'intensité y est présentée en termes absolus et non en termes relatifs.

Dit autrement, la technique de production d'un bien intensif en capital sollicite exclusivement du facteur capital. La remarque est valable pour le facteur travail.

Si nous prenons par exemple des ordinateurs, nous les définirions comme étant des biens intensifs en travail mais pas dans le sens que leur donne la théorie du commerce international.

Ici, le terme intensif cherche à saisir non pas l'intrant nécessaire à la production (même si la modélisation qui suivra peut le faire apparaître et penser ainsi) du bien mais plutôt l'intrant nécessaire à l'utilisation du bien une fois produit.

C'est ainsi qu'il faudra entendre les choses lorsqu'on dira qu'un bien ou un service est intensif en travail ou en capital.

¹⁰ « *Labor and Capital Augmenting Technical Change* » *Journal of European Economic Association* Volume 1.

¹¹ Modèle d'Heckscher-Ohlin ou modèle de proportion des facteurs.

1.2 Le fait stylisé relatif aux parts factorielles de long terme

Il est utile de rappeler que sur la longue période les parts relatives de capital et de travail dans le produit ou de manière équivalente la part relative de capital par rapport au travail dans le revenu sont assez constantes.

Les figures a et b ci-dessous illustrent respectivement les parts du facteur travail dans les PIB américain et français sur environ 70 et 85 ans.

L'observation de ces figures ne laisse pas entrevoir une tendance confirmée à la hausse ou à la baisse de la part du facteur travail (donc du facteur capital évidemment) dans le PIB aussi bien aux Etats-Unis qu'en France.

On peut néanmoins observer que sur certaines périodes plus ou moins longues, il y a d'importants mouvements dans la part du travail.

Ainsi pendant la seconde guerre mondiale et les cinq ou six années qui suivirent, on peut voir une hausse prononcée de la part du facteur travail (baisse prononcée de la part du facteur capital) plus marquée en France notamment.

Cependant, un retour plus ou moins raide vers une stabilité autour de 2/3 pour le facteur travail est également observé, ce qui illustre que hormis des mouvements plus ou moins importants sur des périodes plutôt courtes, on retrouve sur long terme approximativement ce ratio. Ci-dessous, les figures a et b :

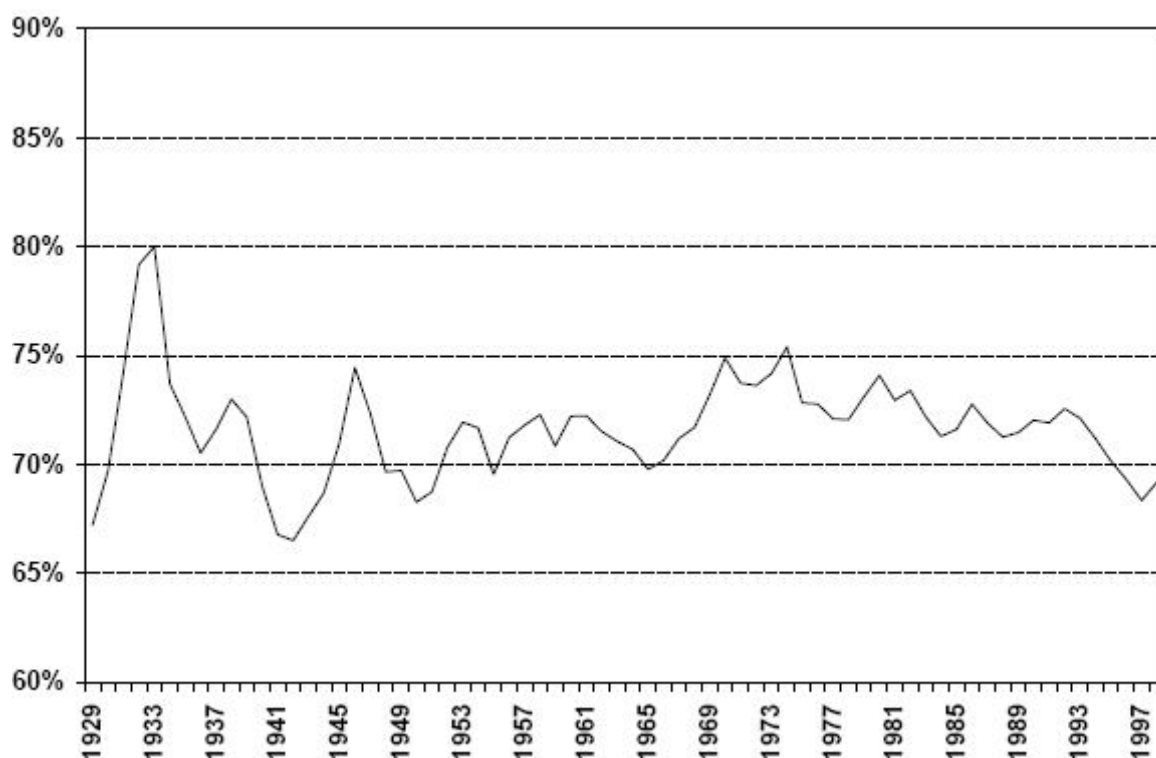


Figure a: Source: National Accounts [2001] NIPA Table 1,16

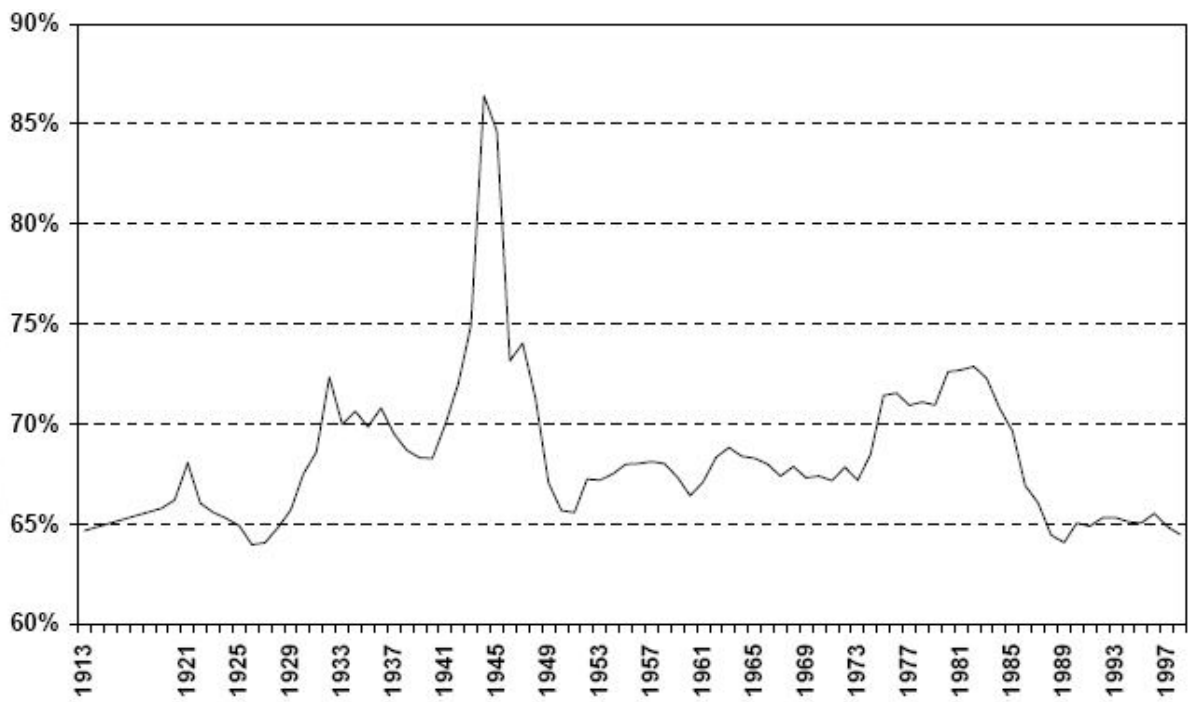


Figure b: Source: Piketty.T [2001], "Income Inequality in France", Cepremap

Lorsque l'on raisonne avec une technique de production de type Cobb-Douglas, la régularité de long terme observée est retrouvée et on peut faire allusion à l'exercice de comptabilité de la croissance qui utilise celle-ci mais dans un modèle théorique de croissance, elle pourrait s'expliquer intuitivement (nous y reviendrons) ainsi :

Partant du constat qu'à long terme, il existe deux manières d'augmenter la production de bien intensif en capital (accumulation du capital et progrès technique en direction du facteur capital) et une seule pour la production de biens intensifs en travail (progrès technique sur le facteur travail) on peut en déduire qu'en régime de croissance équilibrée, le progrès technique devra être uniquement harrodien.

Réaliser du progrès tel que cela est proposé dans la modélisation choisie par Acemoglu.D [2003] consiste à produire de plus en plus de biens intensifs en travail.

Le coût du travail varie selon que l'offre de biens intensifs en travail est abondante ou non. Le coût relatif du travail varie ainsi selon que le nombre de biens intensifs en travail dans l'économie est relativement plus ou moins important que l'offre de biens intensifs en capital dans cette économie.

Là on retrouve typiquement le raisonnement sous-jacent du modèle d'Heckscher-Ohlin ou modèle suédois à savoir que l'abondance d'un bien signifie que son coût relatif est de moindre importance.

Dans une configuration où l'élasticité de substitution entre biens intensifs en travail et biens intensifs en capital est faible, un accroissement de la quantité de biens intensifs en travail signifie que le coût relatif du capital s'est accru.

En effet, une quantité relativement plus grande de biens intermédiaires intensifs en travail, signifie que la productivité relative du travail est à l'échelle macroéconomique plus importante que celle du capital.

Ainsi, en utilisant les mêmes quantités de biens intermédiaires qu'avant l'augmentation de leur nombre, on atteindrait une isoquante de niveau plus élevée. Puisque le coût relatif du capital est élevé, la part relative du capital dans l'output l'est également en conséquence.

La part relative du capital est simplement le rapport de l'élasticité du produit par rapport à l'intrant capital à l'élasticité du produit par rapport à l'intrant travail.

Si l'on suppose que les facteurs sont rémunérés à leur productivité marginale, c'est donc le rapport $\frac{rK}{wL}$ avec r le taux d'intérêt pour approximation du coût d'usage du capital, w , le salaire pour approximer le coût salarial totale, K , le facteur capital et L , le facteur travail.

Ceci induit du progrès technique en direction du capital, ce qui augmente le nombre de biens intensifs en capital qui réduit le prix relatif du capital et par conséquent sa part relative. Son poids dans l'output se réduit.

Dans une configuration où l'élasticité est forte on substituera des biens intensifs en travail aux biens intensifs en capital, ce qui rétablit l'équilibre de la part factorielle et donc des poids respectifs dans l'output.

On voit donc qu'un mécanisme de rééquilibrage des parts factorielles *via* du progrès technique est à l'oeuvre dans les deux cas. Ce mécanisme est donc la résultante d'un autre mouvement moins apparent, qui est celui du comportement maximisateur du secteur de la recherche en partant des dotations de l'économie en biens intensifs en travail et en capital.

Au centre de ce raisonnement on retrouve comme le prédisait Hicks.J.R en 1932¹² les germes de la théorie du progrès technique induit par les prix.

« A change in the relative prices of the factors of production is itself a spur to invention, and to invention of a particular kind directed to economizing the use of a factor which has become relatively expensive »

Mais une asymétrie existe et doit être rappelée pour comprendre intuitivement les propriétés du régime de croissance équilibrée:

C'est que, comme déjà annoncé, le facteur capital s'accumule alors que le facteur travail ne s'accumule pas.

Au total, en régime de croissance équilibrée, la productivité du capital ne doit pas changer tandis que celle du travail est augmentée par deux moyens : le progrès technique en direction du facteur travail et l'accumulation du capital qui peut occasionner un effet de "*capital deepening*" venant amplifier le mouvement haussier

des salaires. Pour le voir, il suffit d'appliquer l'asymétrie mentionnée au ratio $\frac{rK}{wL}$.

Nous reviendrons plus tard sur cette discussion.

Ce résultat peut être comparé à l'analyse de Cette.G et al [2004]¹³ (page 84) à propos de l'impact des nouvelles technologies de l'information (progrès technique sur

¹² "The Theory of Wages", pp 124 -125.

¹³ Revue d'Economie Politique, n° 1, pp 77-97.

le capital cette fois) sur les productivités potentielles des facteurs capital et travail. Le lecteur peut aussi se reporter au chapitre 1 de ce travail qui reprend cette analyse.

Il peut également être instructif d'étudier ce qu'il se passe en dehors d'un sentier équilibré, c'est-à-dire dans le régime transitionnel.

Partant du lien entre diffusion des TIC, amélioration de la productivité du travail et comportement des contributions factorielles, nous cherchons à montrer que moyennant une modélisation du progrès technique endogène, il est possible de prédire sur le long terme, jusqu'où l'introduction de produits TIC reste compatible avec le régime de croissance équilibrée quand l'élasticité de substitution est inférieure à 1. Lorsque l'élasticité de substitution entre biens TIC et biens Hors-TIC est supérieure à l'unité, nous verrons qu'un régime de croissance équilibrée ne saurait plus être stable et la prédiction sur l'apport futur des TIC en est modifiée.

En partant de situations où le rythme de progrès technique est différent entre le secteur TIC et les secteurs Hors-TIC, on peut voir comment, selon le niveau des élasticités, le poids des TIC dans la valeur ajoutée évolue.

Ces raisonnements nous permettent donc de répondre à l'incertitude sur l'avenir de la contribution de ces produits à la valeur ajoutée, à savoir précisément, la question portant sur une éventuelle décroissance continue de celle-ci¹⁴ qui résulterait d'une saturation progressive en TIC de nature à ramener l'élasticité-prix de la demande en ces produits à un niveau inférieur à 1 alors qu'elle est actuellement au-dessus.

Une saturation importante en produits TIC atténuerait l'effet volume par rapport à l'effet baisse des prix de ces produits.

En effet lorsque l'élasticité-prix de la demande est inférieure à 1, une baisse des prix des produits TIC entraîne une augmentation moins que proportionnelle de la demande en produits TIC, ce qui signifie une contribution continûment décroissante des TIC à la croissance au fur et à mesure de leur diffusion (supposée continue).

Pour arriver à une réponse, nous proposons d'approcher la part des TIC dans la valeur ajoutée à partir de l'observation de l'effet des TIC sur la productivité du travail.

La réponse à la question de l'incertitude sur l'apport futur des TIC à la croissance n'est pas aisée: Oulton.N [2001] (cf note 10 et page 48) évoque d'abord la question de l'élasticité de substitution des produits TIC aux autres intrants par rapport à laquelle porterait l'incertitude à long terme. Il évoque ensuite une deuxième variable qui est la nature du progrès technique en direction des TIC. Cette deuxième force peut contrecarrer la dégradation de l'élasticité-prix de la demande en TIC.

Marshall.A [1920]¹⁵ donne l'exemple de la consommation d'eau (bien multi usage comme les TIC) dont l'élasticité-prix de la demande est plus élevée pour des niveaux des prix élevés et devient inélastique au fur et à mesure que les besoins sont satisfaits. Oulton souligne la difficulté de trouver une fonction de coût de production

¹⁴ Voir Oulton.N *"ICT and Productivity Growth in the UK"*, Bank of England pp 46-48 ou Cette.G, Mairesse.J et Kocoglu.Y [2004] "Diffusion des TIC et croissance potentielle" Revue d'Economie Politique pp 77-97 pour une lecture de certaines incertitudes liées à l'ampleur et à la longueur de la diffusion des TIC dans les économies.

¹⁵ *"Principles of Economics"*, (Eighth edition, 1966), London Macmillan cité par Oulton [2002].

présentant ces propriétés tout en restant compatible avec la stabilité des parts factorielles de long terme empiriquement observée.

Il souligne un peu plus loin (page 49) que la réponse sur la tenue à long terme de l'élasticité de substitution des TIC aux autres intrants peut être abordée sous l'angle du biais de progrès que connaîtront ces produits.

Si l'industrie TIC arrivait à soutenir un rythme d'innovations dans de nouveaux produits ou de produits intégrant de nouvelles fonctionnalités plutôt que dans l'amélioration de produits existants (l'exemple d'une accélération de la vitesse des communications courriels peut illustrer l'amélioration de produits existants), il y a lieu de conjecturer un maintien ou une croissance de la part de ces produits.

Il semble se dégager que l'auteur suggère que l'évolution des produits TIC dans la croissance dépendra de l'effet combiné de l'élasticité de substitution entre les biens TIC et les autres biens et de l'accroissement des variétés de biens TIC. Un modèle de progrès technique de variété des biens de production semble se prêter à la perspective de Oulton. Il permettra de vérifier la conjecture précédente.

Nous proposons d'introduire cette double incertitude dans un modèle de progrès technique endogène de variété qui consiste donc en l'accroissement du nombre existant de biens et services TIC ou Hors-TIC. A défaut de prédire l'évolution des produits TIC dans la croissance en recourant à une fonction de demande en facteurs de production TIC qui serait à élasticité décroissante comme le suggère Oulton, notre analyse permettra toutefois de répondre à la même question avec un autre outil.

On montre l'existence d'une part factorielle ou de façon équivalente d'une "intensité factorielle d'indifférence" à laquelle est associée une abondance relative de produits TIC par rapport aux Hors-TIC et qui satisfait au régime de croissance équilibrée.

Par ailleurs ce régime est stable lorsque l'élasticité de substitution entre ces deux produits est inférieure à l'unité. Au sens du point-selle (stabilité locale seulement), le système revient donc vers l'abondance relative en produits TIC d'équilibre.

Pour commencer, nous répartirons le capital total en capital TIC et en Hors TIC ou ce qui est équivalent entre biens intensifs en travail et biens intensifs en capital.

Nous suivrons la formalisation de Acemoglu, D [2003] selon laquelle le progrès technique améliorant le rendement du travail consiste en l'introduction de nouveaux biens qui sont utilisateurs du facteur travail. Ainsi en est-il des biens TIC.

Toutes les fois que l'introduction d'un bien ou d'un service va dans le sens d'une amélioration de la productivité du travail, il sera considéré comme bien intensif en travail et réciproquement s'agissant des biens intensifs en capital.

Il en ressort, entre autres, qu'à condition que l'élasticité de substitution entre les biens TIC et les autres biens soit inférieure à 1, la part des TIC dans le produit pourrait ne pas diminuer continûment en dépit de la diffusion de ces produits. Mais ce résultat est un résultat d'équilibre, donc purement théorique et moins intéressant pour la comptabilité de la croissance.

En revanche, il permet d'expliquer la question de l'équilibre par des comportements microéconomiques standards (maximisation de profits, concurrence pure et parfaite, monopole). Le modèle sous-jacent de la diffusion qui est utilisé consiste donc en un modèle de progrès technique de variété des biens intermédiaires.

En dehors de la question de l'équilibre, il faut envisager l'étude du régime transitionnel qui est également d'intérêt en ce qu'elle permet notamment de voir ce qu'il se passe quelle que soit la valeur de l'élasticité-prix de la demande et quelle que soit la nature du régime de croissance (pas d'exigence de croissance équilibrée).

Une analyse détaillée du régime de croissance équilibrée sera menée dans une première étape. Elle est indispensable à deux titres:

Premièrement, le but de la modélisation du progrès technique endogène qui a été adoptée se veut être une tentative de validation de l'effet stylisé relatif à la stabilité des parts factorielles sur longue période.

Secondement, l'étude de l'équilibre est indispensable pour l'analyse des régimes de transition. C'est une situation référentielle.

Une fois les enseignements du régime d'équilibre connus, il sera plus aisé de faire les rapprochements avec les questions relatives à l'essor des TIC et leur impact sur la stabilité des parts factorielles, donc l'évolution de leur poids dans le revenu.

En montrant la nature et le rythme du progrès technique qui serait compatible avec la stabilité factorielle ou l'instabilité, elle fournit des enseignements sur les comportements microéconomiques des agents qui seraient adéquats tout en laissant en jeu la question cruciale de l'élasticité de substitution entre les produits TIC et les autres produits. Ainsi, se situant par exemple dans le régime de croissance équilibrée, nous pourrions préciser les parts factorielles de capital et de travail compatibles avec son existence, sa stabilité et son instabilité. Ces parts factorielles exigent que les biais de progrès techniques soient orientés d'une façon précise vers les biens TIC ou Hors-TIC dont le nombre relatif augmente, reste stable ou diminue selon que le régime soit d'équilibre ou de transition.

On montre que lorsque l'élasticité-prix de la demande de produits TIC est inférieure à l'unité, le progrès technique contribuant à la diffusion des TIC peut se poursuivre à un rythme égal à l'accumulation du capital en régime équilibré. Dans ce cas, on n'observe pas de dérive continue de la part des produits TIC dans la valeur ajoutée.

2. Modélisation du progrès technique sous forme de nouveaux biens intensifs en facteur travail ou en facteur capital

Le progrès technique qui est introduit dans ce modèle prend la forme d'élargissement du nombre de biens intensifs en facteur travail et/ou en facteur capital. Nous pouvons alors définir la nature du progrès de la façon suivante :

Un progrès sera qualifié d'Harrodien lorsqu'il aboutit uniquement à l'élargissement de l'ensemble n des biens intensifs en travail. De façon équivalente, on dira qu'il est « *Labor-augmenting technical change* » (Lac) en suivant la terminologie de Acemoglu. D [2003].

Un progrès sera qualifié de Solowien lorsqu'il aboutit uniquement à l'élargissement de l'ensemble m des biens intensifs en capital. De façon équivalente, on pourra dire qu'il est « *Capital-augmenting technical change* » (Catc)

Un progrès sera qualifié d'Hicksien¹⁶ lorsqu'il aboutit à l'élargissement simultané et de même ampleur de n et m .

L'économie dont il est question se compose de L travailleurs "non qualifiés" affectés au secteur de la production finale et de S « scientifiques » affectés au secteur de la recherche & développement. Ces deux secteurs ne sont pas en concurrence pour les mêmes travailleurs.

2.1 Le modèle de base: Les caractéristiques des agents

2.1.1 Secteur de la consommation

Les préférences de l'agent représentatif illustrent l'aversion constante au risque et sont donc de type CRRA (*Constant relative risk aversion*) :

$$(1) \quad \int_0^{\infty} \frac{C(t)^{1-\theta} - 1}{1-\theta} \exp^{-\rho t} dt$$

où $C(t)$ est la consommation à la date t et θ l'élasticité instantanée de substitution intertemporelle de cette consommation.

¹⁶ De manière générale, nous savons que par définition, suite à du progrès Hicksien l'égalité des produits marginaux du travail et du capital est requise.

Rien n'assure cette égalité dès lors que l'orientation du progrès technique est soumise et donc orientée par la contrainte de maximisation du profit.

C'est en ce sens que nous estimons que le progrès technique n'est qu'exceptionnellement rigoureusement Hicksien. Il est par conséquent quasi-Hicksien. Cette légère nuance terminologique prendra davantage de sens lors de l'étude du régime en déséquilibre, soit en transition.

Encadré 1.2 L'élasticité instantanée de substitution intertemporelle de la consommation et la forme isoélastique CRRA

Soient deux instants t et s : L'élasticité de substitution intertemporelle de la consommation est définie par :

$$\begin{aligned}\theta_{c_t/c_s} &= \frac{\partial \ln \frac{C_t}{C_s}}{\partial \ln TMS_{c_t/c_s}} = \frac{\partial \ln C_t - \partial \ln C_s}{\partial \ln \frac{U'(C_s)}{U'(C_t)}} = \frac{\frac{\partial C_t}{C_t} - \frac{\partial C_s}{C_s}}{\frac{U''(C_s) \partial C_s}{U'(C_s)} - \frac{U''(C_t) \partial C_t}{U'(C_t)}} \\ &= \frac{\frac{\partial C_t}{C_t} - \frac{\partial C_s}{C_s}}{\frac{U''(C_s) \partial C_s}{U'(C_s)} - \frac{U''(C_t) \partial C_t}{U'(C_t)}}\end{aligned}$$

La modification dans le dénominateur de la dernière expression ne change en rien le résultat mais nous permet d'envisager une simplification avec le numérateur.

Par ailleurs on a :

$$\begin{aligned}\lim_{s \rightarrow t} \frac{U''(C_s) C_s}{U'(C_s)} &= \frac{U''(C_t) C_t}{U'(C_t)} \text{ d'où :} \\ \lim_{s \rightarrow t} \theta_{c_t/c_s} &= - \frac{U'(C_t)}{U''(C_t) C_t} = \theta\end{aligned}$$

θ est l'élasticité de substitution intertemporelle instantanée de la consommation ou encore élasticité de l'utilité marginale de la consommation.

Que se passe-t-il lorsque $\theta = 1$?

La CRRA est alors une forme indéterminée (0/0). En posant $u = 1 - \theta$, la partie indéterminée de la fonction se réécrit :

$\frac{C^u - 1}{u} = \frac{f(u)}{u} = \frac{0}{0}$ si $\theta = 1$ (d'où l'utilité d'introduire le « $-\frac{1}{1-\theta}$ » dans la fonction et par application de la règle de l'Hôpital :

$$\frac{f'(u)}{1} = (\exp^{u \ln C} - \exp^1)' = (u \ln C)' \exp^{\ln C \cdot u} = \ln C \cdot C^u = \ln C \text{ quand } u = 0$$

Par conséquent lorsque l'élasticité est unitaire, il faudra prendre comme CRRA :

$$\int_0^\infty (\ln C) (\exp^{-\rho t}) dt$$

Lorsque l'élasticité est nulle la CRRA devient donc linéaire.

La contrainte de budget de l'agent représentatif implique que ses dépenses de consommation et d'investissement ne dépassent pas ses ressources :

$$(2) \quad C + I = wL + rK + w_s S + \Pi = Y$$

avec I l'investissement, w et w_s les salaires des « travailleurs » et des « scientifiques », K le stock de capital et Π le profit total dans l'économie.

L'output global Y est obtenu selon une combinaison CES des quantités Y_{TIC-L} et Y_{HTIC-K} de biens finals TIC intensifs en travail L et des biens Hors-TIC intensifs en capital K , dont l'élasticité de substitution est: $\varepsilon \in [0, \infty[$.

$$(3) \quad Y = \left[\gamma Y_{TIC-L}^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (1-\gamma) Y_{HTIC-K}^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}$$

Pour le moment la dynamique d'accumulation est supposée par simplification ignorer la dépréciation. On a donc:

$$(4) \quad \dot{K} = I$$

On approxime en outre le coût d'usage du capital par le seul taux de l'intérêt. Les lecteurs trouveront ici encadré la définition précise du coût d'usage du capital.

Encadré 1.3 Définition et calcul du coût d'usage du capital

Le coût d'usage d'un équipement correspond au prix à payer pour en bénéficier pendant la période t en utilisant un service de crédit-bail ou bien par la simple location de celui-ci.

Le coût d'usage d'un équipement doit intégrer son prix (P_t^i), les intérêts sur sa valeur (iP_t^i) et son prix de revente qui doit lui-même prendre en compte le taux d'inflation et la dépréciation qu'on vient d'évoquer.

Le calcul du coût d'usage résulte du programme de maximisation intertemporelle d'une firme. On se place dans un cadre concurrentiel dans lequel la fonction de production de la firme est décrite par $Y = F(K, L)$ avec Y, K, L respectivement l'output, le facteur capital et le facteur travail.

En cherchant à maximiser la valeur actuelle de ses profits futurs, la firme doit satisfaire au programme intertemporel suivant :

$$\text{Max}_{L,K} V_0 = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^{t+1}} (P_t Y_t - w_t L_t - P_{I,t} I_t)$$

sachant que:

$$Y_t = F(K_t, L_t) \text{ et } I_t = K_{t+1} - (1-\delta)K_t \text{ avec } K_0 \text{ donné.}$$

La résolution de ce programme nous fournit les conditions marginales suivantes:

$$(1+i)^{-(t+1)}(P_t F'_L - w_t) = 0 \quad (1)$$

$$(1+i)^{-(t+1)}(P_t F'_K + P_{I_t}(1-\delta) - (1+i)P_{I_{(t-1)}}) = 0 \quad (2)$$

De la première condition, on retrouve qu'au point optimal le salaire réel doit être égal à la productivité marginale actualisée du travail. C'est la condition habituelle qui veut que la firme poursuive l'embauche jusqu'au moment où la contribution actualisée du travailleur supplémentaire égale son coût réel.

La deuxième condition est équivalente à:

$$P_t F'_K = P_{I_t} \left[(1+i) \frac{P_{I_{(t-1)}}}{P_{I_t}} - (1-\delta) \right]$$

En notant $\pi_t = \frac{P_{I_t}}{P_{I_{(t-1)}}} - 1$, le taux d'inflation des biens d'investissement entre deux

dates et en supposant que celui-ci est ici constant - pour illustrer le fait que les prix considérés sont considérés constants dans la méthode de comptabilité de la croissance ce qui permet de mesurer la croissance en volume ou réelle - on peut simplifier la deuxième condition marginale comme ceci:

$$P_t F'_K = P_{I_t} \left[\frac{1+i}{1+\pi} - 1 + \delta \right]$$

Nous pouvons utiliser une approximation (en négligeant la valeur de $\delta\pi$ dans le calcul):

$$F'_K \cong \frac{P_{I_t}}{P_t} (i + \delta - \pi) \quad (3)$$

(3) est le coût d'usage réel d'une unité de facteur capital.

2.1.2 Secteur de la production de bien final

Les différents biens finals intensifs en travail et en capital sont produits en concurrence parfaite selon une technique CES (*Constant elasticity of substitution*) combinant à des degrés donnés et selon une élasticité de substitution $\nu = \frac{1}{1-\beta}$ des

biens intermédiaires intensifs en travail et en capital achetés auprès du secteur monopoleur des biens intermédiaires.

$$(5) \quad Y_{TIC-L} = \left[\int_0^n y_{ticl}(i)^\beta di \right]^{\frac{1}{\beta}} \quad \text{et} \quad Y_{HTIC-K} = \left[\int_0^m y_{htick}(i)^\beta di \right]^{\frac{1}{\beta}}$$

où $y_{ticl}(i)$ et $y_{htick}(i)$ sont les quantités du bien intermédiaire TIC numéro i et Hors-TIC numéro i intensifs respectivement en facteur travail et en facteur capital qui sont utilisées dans la production des biens finals correspondants.

Etant donné qu'à l'intérieur de chacun des deux secteurs, les biens intermédiaires de différents types (ou numéros) sont supposés substituables, cela signifie une élasticité de substitution supérieure à 1¹⁷, ce qui est le cas dès lors que le paramètre β est compris dans l'intervalle $[0, 1[$.

Encadré 1.4 Quid de la propriété de croissance endogène du modèle ?

Comme dans Barro.R et Sala-i-Martin.X [1995]¹⁸, reprenant les analyses de Spence.M [1976]¹⁹, Dixit.A et Stiglitz.J [1977]²⁰, Ethier.W.J [1982]²¹ et Romer.P [1987]²², la forme additive qui est utilisée au niveau des fonctions (5) traduit l'indépendance entre les produits marginaux des intrants.

Cette indépendance signifie aussi que de nouveaux biens intermédiaires coexistent avec les anciens.

Cette caractéristique est importante car elle permet de distinguer ces modèles de variété de l'analyse des innovations qualitatives décrivant un processus de "création destructrice" comme ceux de Schumpeter.J ainsi qu'Aghion.P et Howitt.P [1992].

Pour ces derniers modèles, au fur et à mesure que des produits de qualités supérieure sont inventés, les biens déjà existants deviennent obsolètes.

On voit d'après les fonctions (5) que le progrès technique consiste à augmenter les bornes supérieures des intégrales ce qui interroge sur l'effet comparé de cette augmentation et de celle des quantités de biens intermédiaires (à progrès technique donné) sur la croissance de l'output global.

Nous suivons l'analyse de Barro.R et Sala-i-Martin.X [1995] que nous appliquons à ce modèle ce qui permet de dégager le résultat suivant:

Dès l'instant où le coût d'acquisition (en fait la valeur du brevet octroyé par le secteur de la recherche) des différents biens intermédiaires est identique et que ceux-ci entrent symétriquement dans les équations (5), on montre qu'en dépit des rendements marginaux décroissants de chaque bien intermédiaire, les rendements d'échelle sont croissants si n ou m augmente.

En revanche si les quantités de biens intermédiaires utilisées augmentent à n et m constants, les rendements d'échelle restent constants.

Ces deux derniers points assurent que la fonction de production renferme une propriété conforme aux théories de la croissance endogène.

¹⁷ Une élasticité de substitution supérieure à 1 ou une élasticité-prix directe de la demande de biens intermédiaires adressée au monopoleur négative et inférieure à 1 ou encore une élasticité-prix croisée positive et supérieure à 1 pour signifier la forte substituabilité entre les biens considérés. On exclut la parfaite substitutabilité puisque nous avons exclu la fonction Cobb-Douglas.

¹⁸ "Economic Growth", McGraw-Hill, New York.

¹⁹ "Product Differentiation and Welfare", *American Economic Review*, vol 66, pp 407-414.

²⁰ "Monopolistic Competition and Optimum Product Diversity", *American Economic Review*, vol 67, pp 297-308.

²¹ "National and International Returns to Scale in the Modern Theory of International Trade", *American Economic Review*, vol LXXII, pp 389-405.

²² "Growth Based on Increasing Returns Due to Specialization", *American Economic Review*, LXXVII, pp 56-62.

En analysant cependant cette propriété conforme, nous allons mettre en évidence une autre, à savoir que dans le cas du présent modèle, la croissance endogène obtenue est à rendements d'échelle croissants par rapport au progrès technique. Nous prenons le soin de la comparer aux modèles de croissance endogène mais avec rendements d'échelle constants par rapport au progrès technique.

Pour voir d'abord la propriété de croissance endogène de cette formalisation, anticipons un peu sur la suite, en posant qu'à l'équilibre les quantités de chaque intrant utilisé dans les fonctions (5) sont identiques (ce qui est vrai, chapitre 6 Barro.R et Sala-i-Martin.X [1995]) et notons cela comme :

$$\forall i \ y(i) = \bar{y}$$

Reportons dans l'une des équations (5) quel que soit le secteur, par exemple celui des produits TIC :

$$Y_{TIC-L} = \left[n \bar{y}^\beta \right]^\frac{1}{\beta}$$

A partir de cette expression, supposons par exemple que nous triplions la quantité utilisée de chaque bien intermédiaire intensif en travail.

La production du bien final intensif en travail serait de $\left[3^\beta \right]^\frac{1}{\beta} Y_{TIC-L} = 3 Y_{TIC-L}$ alors qu'en triplant le nombre de biens intermédiaires intensifs en travail, la production serait de $3^\frac{1}{\beta} Y_{TIC-L}$ ce qui au vu des valeurs admises du paramètre β est supérieur à $3 Y_{TIC-L}$.

Intuitivement, ce bénéfice supérieur lorsque le nombre de biens intermédiaires augmente, reflète la décroissance des rendements de chacun des biens intermédiaires pris séparément. Ce bénéfice supérieur illustre la propriété de croissance endogène.

Il y a lieu cependant de remarquer que sous cette formalisation, l'accroissement des quantités utilisées de chaque facteur bien que permettant d'éviter la décroissance des rendements que nous connaissons en croissance exogène, aboutit toutefois précisément à des rendements d'échelle constants en $y(i)$.

En outre, tout en évitant la décroissance que l'on vient d'évoquer, la formalisation exhibe des rendements d'échelle croissants par rapport au nombre de biens intermédiaires utilisés.

Ces deux rendements contrastent avec ceux que l'on obtient avec les formulations habituelles du progrès technique ce qui s'explique par le contenu de la fonction de production utilisée. Celui-ci provient de la modélisation particulière qui est adoptée ici et dont on a développé les contours au niveau de l'introduction de ce chapitre.

Fréquemment dans les modèles de progrès technique, la fonction de production du secteur final combine la plupart du temps deux ou plusieurs facteurs (capital, travail, capital humain...) avec des rendements d'échelle constants, ce implique que les rendements marginaux soient décroissants.

Or ici, comme nous allons le voir à la section suivante, la production de biens intermédiaires ne requiert par hypothèse qu'un seul facteur à rendement marginal et donc d'échelle constant (cf équation (6)).

C'est ce que traduit le contenu unifactoriel des équations (5) et qui explique qu'alors que les modèles de croissance endogène avec rendements d'échelle constants présentent des rendements marginaux décroissants, les rendements marginaux identiques ici à ceux d'échelle soient constants par rapport aux quantités utilisées de biens intermédiaires. Les mêmes raisons expliquent l'obtention de rendements croissants lorsque le nombre de biens intermédiaires augmente alors que les modèles de progrès technique usuels aboutissent à des rendements d'échelle constants. Ainsi dans ce modèle, l'augmentation continue de n ou m empêche la diminution des rendements comme dans les modèles habituels.

La particularité réside donc dans le fait qu'ici, le modèle de croissance endogène est à rendements marginaux et d'échelle croissants par rapport au nombre de biens intermédiaires mais à rendements constants par rapport aux quantités de biens intermédiaires.

Dans les modèles usuels, on observe des rendements marginaux et d'échelle décroissants par rapport aux quantités utilisées de biens intermédiaires et des rendements d'échelle constants par rapport au nombre de biens intermédiaires.

Mais l'obtention de la propriété de croissance endogène a été rendue plus aisée du fait qu'à l'équilibre, les quantités de biens intermédiaires produites sont identiques entre les monopoleurs du secteur des biens intermédiaires. Cela ne peut se comprendre que dans la mesure où l'élasticité de la demande de biens intermédiaires (par le secteur des biens finals) adressée à l'entreprise i du secteur monopoleur des biens intermédiaires est la même²³ que celle adressée à l'entreprise j du même secteur.

Nous montrons que ceci est bien le cas au niveau des équations (14) plus en avant.

Cela s'explique d'abord par la formulation des fonctions de production que nous avons en (5) et dans lesquelles chaque bien intermédiaire a un poids identique dans la production. Une même élasticité-prix de la demande de biens intermédiaires entraîne la pratique d'un prix de monopole identique²⁴ pour tout bien intermédiaire considéré. Cela s'explique par le fait qu'aussi bien les fonctions de production que les coûts de production sont identiques entre toutes les entreprises du secteur des biens intermédiaires comme le montrent respectivement les équations (5) et les technologies linéaires que nous retrouvons dans les équations (6) dont les formes sont communes à toutes les entreprises.

Puisqu'il en est ainsi, nous pouvons dire que plus les firmes utiliseront les nouveaux biens intermédiaires dans des proportions identiques et plus l'effet sur la croissance du secteur des biens finals sera conséquent ce qui entraîne à son tour la même conséquence sur l'output global.

²³ Nous montrons de façon détaillée ce résultat, un peu plus en avant, précisément au niveau des équations (14).

²⁴ Pour information, la pratique par les monopoles d'une tarification identique lorsque l'élasticité-prix de la demande est identique pour tous les biens est également vraie même si le monopole considéré n'est pas un monopole privé. En effet, on sait qu'un monopole public offrant plusieurs biens, soucieux de maximiser le surplus collectif et astreint à une contrainte d'équilibre budgétaire devra pratiquer des prix de Ramsey-Boiteux identiques entre les biens dès l'instant où leurs élasticité-prix sont les mêmes et qui sont fonctions décroissantes de ces élasticités. Donc les monopoles considérés ici ne sont pas forcément des privés mais sont forcément monoproducteurs.

En revanche, plus les firmes du secteur final procèdent à des substitutions factorielles suite à l'apparition des nouveaux biens intermédiaires et moins l'effet est conséquent. Cette deuxième éventualité est cependant plus plausible dans des modèles de progrès technique d'amélioration de la qualité des produits qu'il serait intéressant d'envisager. Ce constat amène reconsidérer notre conclusion quant aux effets sur la croissance économique puisque par définition des modèles d'amélioration de la qualité, la clé de cette dernière dépend du degré de la qualité.

Contrairement aux modèles de progrès technique de variétés comme le présent modèle, les modèles d'amélioration de la qualité des produits (innovations verticales) supposent que n et m sont fixes. L'augmentation de la qualité des n et m biens intermédiaires existants suppose un processus de perfectionnement de ces biens tandis que les inventions que l'on retrouve dans le modèle de progrès technique de variétés correspondent plutôt à des inventions portant sur des biens ou des méthodes de production ou encore consistant en l'introduction de biens ou de services nouveaux et qui sont utilisateurs d'un facteur de production donné.

Dans l'esprit de Grossman.G.M et Helpman.E [1991]²⁵, Acemoglu.D [2003] (voir pp 26-27) montre que même en présence d'une modélisation avec destruction créatrice, les propriétés du régime de croissance équilibrée et du régime de transition auxquelles on aboutit ici sont conservées.

2.1.3 Secteur de la production de biens intermédiaires

Les firmes de ce secteur achètent au secteur de la recherche le brevet approprié qui permettra à chacune d'elles de produire, en monopole, le bien intermédiaire i selon une technique linéaire :

$$(6) \quad y_{ticl}(i) = l(i) \quad \text{et} \quad y_{htick}(i) = k(i)$$

où $l(i)$ et $k(i)$ sont les quantités de facteurs travail et capital utilisées respectivement pour le secteur des biens intermédiaires TIC et pour le secteur des biens intermédiaires Hors-TIC.

La condition d'équilibre sur les marchés respectifs des facteurs utilisés implique:

$$(7) \quad \int_0^n l(i) di = L \quad \text{et} \quad \int_0^m k(i) di = K$$

2.1.4 Secteur de la recherche

Il s'agit ici de modéliser le processus par lequel l'économie engendre des inventions de biens intensifs en facteur travail et en facteur capital. En suivant un raisonnement dans l'esprit des modèles de Romer.P [1990] et Rivera-Batiz.L.A et Romer.P [1991]²⁶, le processus d'accumulation des innovations de biens intermédiaires est :

²⁵ "Innovation and Growth in the Global Economy", The MIT Press, Cambridge.

²⁶ "Economic Integration and Endogenous Growth", Quarterly Journal of Economics, pp 531-55.

$$(8) \quad \frac{\dot{n}}{n} = b_{tiel} S_{tiel} - \delta \quad \text{et} \quad \frac{\dot{m}}{m} = b_{htick} S_{htick} - \delta$$

S_{tiel} et S_{htick} représentent le nombre de chercheurs travaillant à l'amélioration des biens intermédiaires de type n ou m . δ est un taux d'obsolescence des techniques existantes et n'est pas différencié selon les deux secteurs.

b_{tiel} et b_{htick} sont les taux constants de progrès technique dans le secteur des TIC et dans le secteur Hors-TIC et auxquels des chercheurs s'attellant à la R&D parviennent donc à "inventer" des nouveaux biens intermédiaires.

La condition d'équilibre sur le marché du travail pour ces chercheurs est :

$$S_{tiel} + S_{htick} = S$$

Dans les équations (8), on utilise le concept de Frontière des Possibilités d'Innovation (FPI) de Kennedy.C [1964]²⁷.

Le progrès technique consiste à repousser les FPI que sont : $\frac{\dot{n}}{n}$ et $\frac{\dot{m}}{m}$.

La première consiste donc à accroître le nombre de biens intermédiaires TIC, tandis que la seconde consiste à accroître le nombre de biens intermédiaires n'appartenant pas au secteur des TIC. En fonction du rapport à 1 des FPI, le progrès technique sera considéré comme Hicksien, Harrodien ou solowien.

En réécrivant les équations (8) comme ci-dessous:

$$\dot{n} = b_{tiel} S_{tiel} n - \delta n \quad \text{et} \quad \dot{m} = b_{htick} S_{htick} m - \delta m$$

On observe plus clairement que le transfert ou la diffusion des connaissances intra-sectorielles est du type "*standing on the shoulders of giants*"²⁸ toutes choses égales par ailleurs c'est-à-dire si $\delta n < bS$ pour chacun des deux secteurs.

Enfin l'hypothèse de libre entrée dans le secteur de la recherche est retenue (profits de long terme nuls).

²⁷ "Induced Bias in Innovation and the Theory of Distribution", *Economic Journal*, vol. LXXIV, pp 541-47.

²⁸ Expression imagée qui compare le chercheur à un nain juché sur les épaules d'un géant.

Encadré 1.5 Comparaison avec la formalisation de la R&D chez Rivera-Batiz.L.A et Romer.P [1991]

Le présent traitement des flux de connaissance se retrouve également dans les travaux de Rivera-Batiz.L.A et Romer.P [1991] portant sur le phénomène d'économie d'échelle généré par l'intégration économique au niveau mondial.

Dans leur secteur de la recherche, il proposent deux formes fonctionnelles pour les FPI. C'est leur première spécification qu'ils qualifient de "*knowledge driven specification*" qui est proche de celle utilisée ici. En effet dans cette spécification, la fonction de production du secteur de la recherche se distingue de celle du secteur de production de bien intermédiaires et final en ce que le travail non qualifié (ici dénommé "travailleurs" et le capital physique (ici les biens intermédiaires) n'y jouent aucun rôle. Le transfert des connaissances (*spillovers*) intra-sectorielles dans le secteur de la recherche est du type "*standing on the shoulders of giants*".

La frontière des possibilités de production dans l'espace biens intermédiaires-finaux et innovations est une courbe puisque les fonctions de productions dans les différents secteurs ne sont pas identiques.

Rivera-Batiz et Romer proposent également une deuxième spécification qu'ils qualifient de "*lab equipment model*" qui en revanche ne distingue pas entre *inputs* utilisés dans la recherche et *inputs* utilisés dans la production.

Le transfert des connaissances (*spillovers*) intrasectorielles est nul. Dit autrement, la familiarité avec les connaissances scientifiques et techniques du passé, ne contribue en rien aux innovations présentes.

La frontière des possibilités de production dans l'espace biens intermédiaires-finaux et innovations est une droite puisque les fonctions de productions dans les différents secteurs sont identiques.

Enfin aussi bien chez ces auteurs qu'ici, la diffusion intersectorielle dans la recherche est elle nulle. La diffusion entre le secteur de la recherche et le secteur de la production est également nulle quelle que soit la spécification retenue (ici, "*knowledge driven*" ou "*lab-equipment*" [en gros modèle de R&D fondée sur le capital humain *versus* modèle de R&D réalisée en laboratoire et fondée sur le capital physique]). Une évolution dynamique par exemple de la FPI dans un secteur n'impacte en rien la dynamique de l'autre.

A titre d'information nous donnons ci-après les FPI telles que nous les retrouvons chez Rivera-Batiz et Romer:

Pour la "*knowledge-driven specification*" on a:

$\dot{A} = \delta HA$ où H est une mesure du stock de capital humain utilisé dans la recherche et A est une mesure des connaissances scientifiques générales et du savoir-faire passé.

Pour la "*lab equipment model*" on a:

$\dot{A} = BH^\alpha L^\beta \int_0^A x(i)^{1-\alpha-\beta} di$ où B est un paramètre constant d'échelle et $x(i)$ l'input physique i utilisé dans la recherche

3. Le modèle de base : Le comportement des agents

3.1 La consommation

Dans le temps, l'agent représentatif souhaite s'installer sur un sentier optimal de consommation. Il devrait donc se conformer au programme suivant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Max} U(0) = \int_0^{\infty} \exp^{-\rho t} \frac{C_t^{1-\theta} - 1}{1-\theta} dt \\ \text{sous la contrainte budgétaire instantanée} \\ \dot{K} = wL + w_S S + rK + \Pi - C \\ K(0) > 0 \text{ donné} \\ \text{et la contrainte terminale (transversalité)} \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \left[K(t) \exp \left(- \int_0^t r(v) dv \right) \right] = 0 \end{array} \right.$$

où $r(v)$ est le taux d'intérêt à la date intermédiaire v .

La condition de transversalité, au-delà de son utilité pour la résolution précise du programme, est là pour indiquer, qu'à l'horizon de planification, le stock de capital détenu par les agents est nul.

Signalons que cette contrainte de transversalité s'écrit de façon équivalente:

$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)K(t) = 0$ où $x(t)$ représente le prix implicite du capital à la date t . Dit

autrement, la valeur du stock de capital doit tendre asymptotiquement vers 0: l'agent finit ses jours sans laisser d'héritage (positif ou négatif). Si le stock de capital demeurerait asymptotiquement positif alors le prix implicite du capital devra tendre vers 0 à un taux plus rapide que le produit $x(t)K(t)$ ne tend vers 0.

Pour résoudre ce programme, posons le Hamiltonien courant suivant (en supprimant l'indice temporel pour gagner en commodité):

$$H(C, K, x, t) = [U(C) + x(wL + w_S S + rK + \Pi - C)]$$

Les conditions de premier ordre donnent:

$$i) U'(C) = x$$

$$ii) \dot{x} = \rho x - r x = x(\rho - r) \Rightarrow \frac{\dot{x}}{x} = (\rho - r)$$

En différenciant i) par rapport au temps on a :

$$\dot{x} = U''(C)\dot{C} \Rightarrow \frac{\dot{x}}{x} = \frac{U''(C)\dot{C}}{U'(C)}$$

En multipliant le membre de droite de la dernière expression par $\frac{C}{C}$, on ne modifie rien mais obtient l'expression suivante:

$$\frac{\dot{x}}{x} = \frac{CU''(C)}{U'(C)} \times \frac{\dot{C}}{C} = -\frac{1}{\theta} \frac{\dot{C}}{C}$$

En combinant avec i), nous obtenons la relation d'Euler ou de Keynes-Ramsey :

$$(9) \quad g_C = \frac{\dot{C}}{C} = \theta(r - \rho)$$

Cette condition implique que la consommation est sur un sentier optimal lorsqu'elle s'accumule à un taux égal à la différence entre la productivité marginale (nette si nous prenons en compte un terme de dépréciation) et le taux d'escompte (ou préférence pour la présent). Ce sentier optimal de consommation est d'autant plus sensible à cette différence que l'élasticité de substitution inter temporelle de la consommation est élevée. La CRRA apparaît alors comme indispensable à l'obtention d'une croissance régulière.

Pour arriver en tout point du temps à se situer à l'optimum de consommation, les agents doivent résoudre le Lagrangien suivant:

$$(10) \quad L(Y_{HTIC-K}, Y_{TIC-L}, \lambda) = U(C) + \lambda(Y - p_{HTIC-K} Y_{HTIC-K} - p_{TIC-L} Y_{TIC-L})$$

En remplaçant Y par sa valeur (3) puis en faisant le rapport des dérivées du Lagrangien par rapport d'abord à Y_{HTIC-K} puis par rapport à Y_{TIC-L} , nous obtenons le prix relatif des biens intermédiaires Hors-TIC comme:

$$(11) \quad p = \frac{p_{HTIC-K}}{p_{TIC-L}} = \frac{1-\gamma}{\gamma} \left(\frac{Y_{HTIC-K}}{Y_{TIC-L}} \right)^{-\frac{1}{\varepsilon}}$$

Afin de déterminer le niveau des prix des biens intermédiaires TIC et Hors-TIC, le bien final Y est supposé être le numéraire (son prix est alors 1).

En tenant compte de (11), l'équation (3) (qui est pour

rappel: $Y = \left[\gamma Y_{TIC-L}^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (1-\gamma) Y_{HTIC-K}^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}$) peut-être exprimée comme fonction des seuls prix de ces biens et des paramètres:

$\left[\gamma p_{TIC-L}^{1-\varepsilon} + (1-\gamma) p_{HTIC-K}^{1-\varepsilon} \right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}} = 1$ d'où il vient:

$$(12) \quad p_{HTIC-K} = \left[\gamma p^{\varepsilon-1} + (1-\gamma) \right]^{\frac{1}{\varepsilon-1}} \quad \text{et} \quad p_{TIC-L} = \left[\gamma + (1-\gamma) p^{1-\varepsilon} \right]^{\frac{1}{1-\varepsilon}}$$

3.2 La production de biens finals et intermédiaires

Nous prendrons l'exemple des firmes se trouvant dans le secteur TIC ou secteur des biens intensifs en travail et aurons des résultats analogues pour le secteur HTIC ou secteur des biens intensifs en capital.

3.2.1 Secteur de la production de biens finals

Pour le secteur de la production du bien final, il y a concurrence parfaite à la fois sur le marché de l'output (on vient de voir que par son comportement maximisateur, l'agent détermine le niveau des quantités optimales à un prix relatif que les firmes appartenant à ce secteur prennent pour donné) et sur le marché de l'input²⁹.

A l'image de l'agent-représentatif consommateur qui cherche à maximiser son utilité, le producteur du secteur final cherche à maximiser son profit qui résulte de la maximisation du programme suivant:

$$\begin{cases} \text{Max} / y_{ticl}(i) \\ p_{TIC-L} Y_{TIC-L} - wL - \int_0^n z_{ticl}(i) y_{ticl}(i) \\ \text{ou avec (5)} \\ p_{TIC-L} \left(\int_0^n y_{ticl}(i)^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} - wL - \int_0^n z_{ticl}(i) y_{ticl}(i) \end{cases}$$

où $z_{ticl}(i)$ est le prix du bien intermédiaire i fixé par le monopole du secteur des TIC.

Etant en concurrence parfaite sur son marché, l'entrepreneur du secteur final prend comme donné, le prix de sa production, celui des biens intermédiaires ainsi que la frontière supérieure de l'activité d'innovation traduite par la borne supérieure des intégrales. La résolution donne:

$$(13) \quad \frac{z_{ticl}(i)}{p_{TIC-L}} = \left(\frac{y_{ticl}(i)}{Y_{TIC-L}} \right)^{-\frac{1}{v}} \Rightarrow y_{ticl}(i)^* = Y_{TIC-L} \left(\frac{z_{ticl}(i)}{p_{TIC-L}} \right)^{-v}$$

Par analogie, la fonction de demande de biens intermédiaires Hors-TIC est:

$$(13) \quad y_{htick}(i)^* = Y_{HTIC-K} \left(\frac{z_{htick}(i)}{p_{HTIC-K}} \right)^{-v}$$

Pour une élasticité de substitution donnée, la quantité de biens intermédiaires demandée par le secteur final au secteur intermédiaire augmente avec sa production et le prix du bien final et diminue lorsque le prix des biens intermédiaires augmente.

²⁹ Bien que le secteur des biens intermédiaires soit en position de monopole. La concurrence parfaite qu'on évoque est vue sous l'angle du secteur final: les firmes de ce secteur sont en compétition pure de tout monopole.

3.2.2 Secteur de la production de bien intermédiaires

Le programme du monopoleur qui s'est acquitté du prix du brevet acheté au secteur de la recherche consiste à choisir la quantité $yticl(i)$ à produire de façon à maximiser son profit. Soulignons au passage que contrairement à Romer.P [1990] (modèle de variété des biens intermédiaires), le coût variable n'est pas exprimé en termes de bien final mais est constitué du seul facteur travail.

En effet chez Romer, l'hypothèse consistait à dire qu'une fraction du bien final (qui utilise du travail) permettait la production d'une unité de bien intermédiaire. Au fond, tout s'y passe comme si le secteur intermédiaire utilisait également du travail.

Ceci étant, nous pouvons écrire le programme d'optimisation dans ce secteur comme :

$$\begin{cases} \text{Max} / yticl(i) \\ zticl(i)(yticl(i) \times yticl(i)) - CT(yticl(i)) \\ \text{avec } CT(yticl(i)) \text{ le coût total associé à la production } yticl(i) \end{cases}$$

La résolution donne :

$$\begin{aligned} z'ticl(i)(yticl(i) \times yticl(i)) + zticl(i)(yticl(i)) - w &= 0 \\ zticl(i)(yticl(i)) \left(1 + \frac{z'ticl(i)(yticl(i) \times yticl(i))}{zticl(i)(yticl(i))} \right) &= w \end{aligned}$$

or l'élasticité-prix de la demande du bien intermédiaire est par définition :

$$v_i = - \frac{\frac{dyticl(i)}{yticl(i)}}{\frac{dzticl(i)}{zticl(i)}} = - \frac{\frac{dyticl(i)}{yticl(i)} \frac{zticl(i)}{yticl(i)}}{\frac{dzticl(i)}{zticl(i)} \frac{yticl(i)}{yticl(i)}} = - \frac{zticl(i)(yticl(i))}{dzticl(i)(yticl(i)) \times yticl(i)}$$

puisque $dyticl(i) = 1$ et pour un monopole $zticl(i) = zticl(i)(yticl(i))$ ou encore $zticl(i) = zticl(yticl(i))$

Cependant, travaillant avec des CES identiques pour toutes les firmes du secteur final (cf équations (6)) on a $v_i = v \forall i$.

En remplaçant la valeur de v dans l'avant dernière expression, nous avons :

$$zticl(i) = \left(1 - \frac{1}{v} \right)^{-1} w$$

Ensuite, sachant que $v = \frac{1}{1-\beta}$ on a :

$$(14) \quad zticl(i) = \frac{w}{\beta} \quad \text{et par analogie:} \quad zhtick(i) = \frac{r}{\beta}$$

avec $\frac{1}{\beta}$, la marge appliquée sur le coût marginal de production qui est w ou r lorsqu'il s'agit du secteur Hors-TIC.

Aussi bien dans le secteur des biens intermédiaires TIC que dans le secteur des biens intermédiaires Hors-TIC, le prix de ces biens à l'intérieur de chaque secteur est identique tel que le montrent les équations (14). Cela implique que chaque firme de ce secteur produira la même quantité du bien intermédiaire dans lequel elle est monopole et réalisera par conséquent le même profit que les autres monopoles.

L'intuition d'un tel résultat vient, nous l'avons déjà expliqué, de ce que dans la formulation de la fonction de production du secteur final (qui est identique pour chaque secteur des biens intermédiaires, cf équations (5)), tous les biens intermédiaires sont utilisés et entrent dans cette fonction avec un poids identique lié lui-même à leurs coûts de production identiques (cf équations (6)).

On retrouve ce résultat habituel dans le cadre des modèles de progrès technique avec différenciation horizontale qui contiennent l'idée de goût pour la variété qui veut que l'agent préfère utiliser beaucoup de peu de biens que peu de beaucoup de biens. Le monopoleur dans notre cas est porté par ce goût de variété émanant des consommateurs dont la demande (de variétés justement) inclut tous types de biens.

Puisque les quantités écoulées dans chaque secteur et pour chaque i sont les mêmes on a : $y_{ticl}(i) = y_{ticl} = l(i)$ et $y_{htick}(i) = y_{htick} = k(i)$ et compte tenu des équations (6) et (7) on a :

$$(15) \quad y_{ticl}(i) = l(i) = \frac{L}{n} = y_{ticl} \quad \text{et} \quad y_{htick}(i) = k(i) = \frac{K}{m} = y_{htick}$$

Pour obtenir l'offre globale de biens finals TIC et Hors-TIC, on substitue d'abord les équations (15) dans les équations (5) puis en intégrant :

$$(16) \quad Y_{TIC-L} = \left[\int_0^n \left(\frac{L}{n} \right)^\beta di \right]^{\frac{1}{\beta}} \Rightarrow Y_{TIC-L} = \frac{L}{n} \left[\int_0^n di \right]^{\frac{1}{\beta}} \Rightarrow Y_{TIC-L} = Ln^{\frac{1-\beta}{\beta}} \quad \text{et par analogie:}$$

$$(16) \quad Y_{HTIC-K} = Km^{\frac{1-\beta}{\beta}}$$

Cette réécriture des équations (5) facilite d'avantage l'interprétation du progrès technique: A population active donnée, une augmentation de n c'est-à-dire du nombre de biens intermédiaires du secteur TIC entraîne une augmentation de la production finale de biens TIC ou encore une augmentation de la productivité du travail. Idem du point de vue du secteur Hors-TIC.

Pour terminer cette section sur les secteurs finals et intermédiaires, nous pouvons écrire les expressions des salaires et du taux de l'intérêt à l'équilibre.

Pour cela substituons les équations (14), (15) et (16) dans (13):

$$(17) \quad w = \beta n^{\frac{1-\beta}{\beta}} p_{TIC-L} \quad \text{et} \quad r = \beta m^{\frac{1-\beta}{\beta}} p_{HTIC-K}$$

Nous pouvons réécrire (11) en cherchant à y faire apparaître les progrès techniques sur les biens TIC et Hors-TIC. Pour cela utilisons (16) afin d'obtenir l'expression du prix relatif des biens finals Hors-TIC comme:

$$(18) \quad p = \frac{p_{HTIC-K}}{p_{TIC-L}} = \frac{1-\gamma}{\gamma} \left[\left(\frac{m}{n} \right)^{\frac{1-\beta}{\beta}} \frac{K}{L} \right]^{-\frac{1}{\varepsilon}}$$

L'élasticité de substitution ε joue un rôle déterminant dans l'évolution de ce prix relatif. L'impact d'une augmentation du rapport m/n réduit le prix relatif des biens Hors-TIC d'autant plus fortement que ε élevée.

On peut encore dire que plus l'abondance relative en biens intermédiaires TIC est élevée (plus m/n faible) et plus le prix relatif des biens finals TIC est élevé lorsque ε est faible. Il existe donc une relation négative entre le prix relatif des deux secteurs finals, l'abondance relative des biens intermédiaires et ε .

3.3 La recherche

Un dernier enchaînement dans ce modèle va du secteur des biens intermédiaires au secteur de la recherche.

L'achat d'un brevet de durée infinie³⁰ coûte au secteur intermédiaire un prix donné.

La firme du secteur des biens intermédiaires n'accepte de payer ce prix que dans la mesure où la somme actualisée des revenus nets anticipés dans son activité de production couvre au moins ce prix. Moyennant l'hypothèse de concurrence parfaite dans le secteur de la recherche (parfaite aussi dans le secteur de la production du bien final et imparfaite dans celui de la production du bien intermédiaire pour rappel) on a donc dissipation totale de profit pur dans ce secteur. Etant donné que le marché des brevets est également concurrentiel, il y a par conséquent dissipation totale de la rente des monopoleurs du secteur intermédiaire. Ni le secteur de la recherche ni celui des biens intermédiaires ou final ne font de profit à l'équilibre de long terme.

Ceci implique que les ménages actionnaires dans ces secteurs ne réalisent pas non plus de profits et cela se traduit par la nullité du terme Π au niveau de l'équation (2).

La valeur du brevet pour le secteur dont la recherche aboutit à l'invention d'un nouveau bien intermédiaire, par exemple dans le secteur TIC est:

$$(19) \quad V_{iicl}(t) = \int_t^{\infty} \exp^{-\int_t^s ((r(\omega) + \delta) d\omega)} \pi_{iicl}(s) ds$$

où $\pi_{iicl}(s)$ est le profit instantané c'est-à-dire à la date s du monopoleur i du secteur TIC et r le taux d'intérêt qui est supposé variable sur les intervalles $(s-t)$ d'où

³⁰ Bien que commode cette durée de vie infinie empêche par exemple d'envisager tout processus de création destructrice tel que le décrit Schumpeter.

l'utilisation de l'intégrale sur cet intervalle avec ω dans le rôle de la variable muette (et pas t). La valeur dans le secteur Hors-TIC a la même forme et est égale à celle du secteur TIC. Cette affirmation est propre au présent modèle et ne se retrouve, pour information, ni chez Romer.P [1990] ni chez Grossman & Helpman [1991] dans leur modèle d'augmentation de la variété des biens de consommation.

Mais comme ces derniers modèles, le fait de supposer des techniques de production de bien intermédiaires identiques dans les deux secteurs et des fonctions de productions finales identiques dans les deux secteurs en y adjoignant une entrée symétrique des biens intermédiaires dans ces fonctions des secteurs finals permet de retrouver les mêmes résultats à condition toutefois que $n = m$ et aussi que $w = r$. Tout se passe comme si nous traitons d'un seul secteur mais utilisant dans toutes les fonctions sectorielles deux sortes d'inputs en nombre $(n + m)$ à une date donnée.

Pour trouver la valeur de l'équation (19), il nous faut trouver le profit maximisé de monopole dans le secteur des biens intermédiaires:

Nous reprenons le programme d'optimisation (cf sous-section 3.2.2) mais le résolvons en utilisant l'information³¹ apportée par les équations (14) et (15) :

$$\begin{cases} \text{Max/ } y_{ticl}(i) \\ z_{ticl}(i)(y_{ticl}(i) \times y_{ticl}(i) - CT(y_{ticl}(i))) \\ \text{avec } CT(y_{ticl}(i)) \text{ le coût total associé à la production } y_{ticl}(i) \end{cases}$$

$$(20) \quad \pi_{ticl} \max = \frac{w}{\beta} \frac{L}{n} - w \frac{L}{n} = \frac{wL - wL\beta}{n\beta} = \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right) \frac{wL}{n} \quad \text{et} \quad \pi_{htick} \max = \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right) \frac{rK}{m}$$

Il est possible d'approcher la nullité des profits dans le secteur de la recherche en invoquant non seulement l'hypothèse de concurrence pure et parfaite dans ce secteur mais aussi la mobilité intersectorielle des "scientifiques", parfaite aussi.

Comme le montrent les équations (8), cette mobilité rendue possible par le caractère concurrentiel du secteur de la recherche notamment à long terme avec l'hypothèse d'entrée sortie des firmes, incite ces travailleurs à se faire employer là où leur contribution marginale à la valeur de l'invention (19) est la plus grande.

Nous aurons par conséquent:

$$(21) \quad w_s = \max \{ b_{ticl} n V_{ticl}, b_{htick} m V_{htick} \}$$

Notons que la formulation (21) indique que le salaire perçu par les "scientifiques" sera non seulement plus élevé là où leur contribution à la valeur sera la plus grande mais ce salaire sera aussi égal, à l'équilibre, à chacune des valeurs (hypothèse de concurrence pure et parfaite dans la recherche). Il ne faut donc pas perdre de vue que seuls deux niveaux de salaires existeront dans l'économie à l'équilibre: l'un dans la recherche en TIC et l'autre dans la recherche Hors-TIC. Or comme nous l'avons déjà fait remarquer les salaires ne doivent pas être différents parce que la mobilité des "scientifiques" exclura dans ce cas l'occurrence d'invention dans le secteur à contribution à la valeur plus faible.

³¹ L'indice "i" n'a plus de raison d'être du moment qu'à l'équilibre prix et quantité de monopole sont identiques.

Le comportement des différents agents de cette économie, pour mener à l'équilibre doit pouvoir l'installer sur un sentier où les prix des facteurs que sont w, w_s et r satisfont aux équations (17) et (21), où la tarification des biens intermédiaires se passe conformément à (14) donnant par conséquent un niveau agrégé de biens finals TIC et Hors-TIC comme dans (16) ainsi qu'une consommation évoluant selon la règle de Keynes-Ramsey elle-même respectant la condition de transversalité.

C'est en ayant à l'esprit ces interactions et l'ordre avec lequel s'opèrent leurs enchaînements qu'il va falloir, après avoir rappelé la définition de la notion de croissance équilibrée caractériser celle-ci.

4. Caractérisation de la dynamique d'équilibre de l'économie

4.1 Définition de la notion de croissance équilibrée

Lorsque la croissance de toutes les variables en niveau se fait à taux constant (ce taux pouvant être nul), on dit qu'elle est régulière ou stationnaire (semi-stationnaire lorsque le taux est nul). S'il se trouve qu'en plus, ce taux constant est identique pour toutes les variables considérées, on dit alors qu'elle est équilibrée.

Dans l'optique d'une croissance équilibrée, il est requis que le produit global ainsi que la consommation et le stock de capital croissent au même taux constant g . L'équation (9) en supposant une préférence pour le présent stable impliquera que le taux de l'intérêt soit constant. Cette constance implique (équation (17)) à son tour que le prix relatif des biens Hors-TIC soit constant, ce que l'on démontre à présent.

4.2 La nécessaire stationnarité du prix relatif des biens Hors-TIC et son impact sur la décision d'orientation du progrès technique dans la recherche

On va démontrer par l'absurde que la nécessité de maintenir constant le taux de l'intérêt (pour être en croissance équilibrée) exige l'absence de progrès technique en direction des biens et services du secteur Hors-TIC et la présence du seul progrès technique en direction des biens et services du secteur TIC.

4.2.1 L'intuition

Mais avant cela, en voici l'intuition lorsque les deux biens sont complémentaires:

Partons d'une situation d'équilibre entre contributions factorielles à l'*output*:

Lorsque les biens intermédiaires Hors-TIC deviennent par exemple relativement plus importants que les biens intermédiaires TIC, cela signifie que le prix relatif des premiers est plus bas que son inverse. Dit plus précisément, c'est le coût relatif des biens Hors-TIC qui devient plus faible traduisant une meilleure productivité relative des biens intermédiaires intensifs en capital. En effet, dans ce modèle le point important est qu'un nouveau bien intermédiaire voit le jour conditionnellement à l'existence d'un profit qui lui est associé. Lorsque l'économie considérée dispose d'une dotation m de biens intermédiaires Hors-TIC, le profit associé à un nouveau

bien est proportionnel au rapport³² de son coût en capital et du nombre de produits existants $\left(\frac{rK}{m}\right)$ comme l'indique l'équation (20).

On peut voir que le progrès technique, à travers l'augmentation de m est de nature à réduire le coût du bien. En réalité, cet effet positif sur le profit provient autant de la forme des équations (8) - qui traduisent l'impact positif de la recherche passée sur la recherche actuelle - que de la formulation des équations (5).

En conséquence, la part du facteur capital devient alors moins importante qu'à l'équilibre initial (formellement on peut se reporter à la sous-section 4.3 pour voir l'équilibre auquel nous sommes en train de faire allusion) et le facteur travail pèse davantage. Cela détermine le sens du progrès technique qui sera biaisé en faveur des biens TIC (Latc). Il en résulte, en cas de recherche couronnée de succès, une augmentation de l'abondance relative en biens TIC, ce qui joue vers une stabilisation des contributions factorielles.

Dès lors que l'on considère les formes des équations (5), (6) et (7), on peut dégager deux sources d'augmentation de la production de biens intensifs en capital :

L'accumulation de capital (l'investissement) et le progrès technique en direction du capital mais une seule source de progrès technique en direction des biens intensifs en travail. Comme l'accumulation du capital est inhérente à tout processus économique qu'il soit en régime transitionnel, d'équilibre ou stationnaire (sauf semi-stationnaire), on a en croissance équilibrée le capital qui croîtrait au même taux constant que l'*output* et la consommation.

L'accumulation du capital qui tend à augmenter les quantités produites de chaque bien intermédiaire Hors-TIC provoquerait la diminution du coût relatif de ces biens. Or de l'équation d'Euler (9), le coût absolu représenté par le taux d'intérêt, devrait rester constant pour que la consommation évolue à taux constant. S'il n'y avait pas de progrès technique en direction des biens TIC, le taux de l'intérêt baisserait (ou plus exactement devrait baisser pour assurer l'équilibre en valeur du capital (rK)) ce qui cesserait d'être en adéquation avec la croissance équilibrée. Pour que baisse il n'y ait pas, du progrès technique en direction des TIC va avoir lieu car la baisse du taux de l'intérêt conformément au raisonnement sur les parts factorielles ci-dessus, implique un poids relatif du facteur travail gagnant en importance.

C'est donc l'existence d'accumulation du capital le long du sentier d'équilibre qui se substituera au Catc et qui avec du Latc maintiennent le taux de l'intérêt dans une constance requise par le régime de croissance équilibrée.

C'est l'existence du phénomène d'accumulation du capital et l'absence d'accumulation du facteur travail qui fait que seul du progrès technique portant sur les TIC qui sera compatible en régime de croissance équilibrée.

³² Si notre cadre d'analyse génère une croissance endogène (cela a été démontré au niveau de l'encadré 1.4), ce rapport fournit une explication rigoureuse de l'existence de cette croissance dès lors que l'on considère des rendements décroissants dans la R&D (qui pourraient du reste laisser penser à une croissance semi-endogène). Ces rendements se traduisent par une augmentation du numérateur mais comme chez Romer, P. [1990], celle-ci peut-être contrebalancée par la baisse du dénominateur, celle-ci étant plus prononcée au fur et à mesure que l'économie accumule de nouveaux produits. Il en résulte finalement que tant que le coût d'invention d'un nouveau produit est inférieur ou égal à la valeur de celui-ci, la croissance demeure endogène.

4.2.2 La démonstration

L'idée précédente, à savoir que la source potentielle de production de biens Hors-TIC est double alors que celle qui est en direction des TIC est unique est au centre de cette démonstration.

Soit le ratio $k = \frac{MK}{NL}$, le rapport des biens finals intensifs en capital (biens du secteur Hors-TIC) aux biens finals intensifs en travail (biens du secteur TIC) ou rapport du capital efficace au travail efficace ou encore capital par tête efficace.

Ce ratio matérialisant donc l'accumulation par tête contient aussi $M = m^{\frac{1-\beta}{\beta}}$ et $N = n^{\frac{1-\beta}{\beta}}$ qui chacune illustre respectivement le progrès technique sur les biens intermédiaires Hors-TIC et TIC. Ceci se voit aisément à partir des équations (16) et particulièrement en prenant la dérivée logarithmique du ratio k , on retrouve clairement l'augmentation liée à la pure accumulation de capital et celle liée au progrès technique portant sur les biens intermédiaires Hors-TIC. Nous allons du reste en avoir besoin lors de la démonstration de l'inexistence de Catc en régime de croissance équilibrée dans le cas où $\varepsilon < 1$.

Afin que la consommation croisse à un taux constant g , il est requis que le taux de l'intérêt, tel qu'obtenu dans (17) soit également constant. On a donc d'après (17): $r = \beta M p_{HTIC-K}$ ce qui en différenciant par rapport au temps donne:

$$\frac{\dot{M}}{M} = - \frac{\dot{p}_{HTIC-K}}{p_{HTIC-K}} \quad (I)$$

Les augmentations de M ou N sont équivalentes à du progrès technique en direction des biens intermédiaires Hors-TIC ou TIC respectivement.

Supposons $\frac{\dot{M}}{M} > 0$ puis en utilisant l'expression de k ci-dessus, l'équation (18) se

réécrit: $p = \frac{p_{HTIC-K}}{p_{TIC-L}} = \frac{1-\gamma}{\gamma} k^{-\frac{1}{\varepsilon}}$ qu'on introduit dans (12) puis différencions l'expression obtenue par rapport au temps après l'avoir passée en logarithme pour avoir:

$$\frac{\dot{p}_{HTIC-K}}{p_{HTIC-K}} = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\gamma \left(\frac{1-\gamma}{\gamma} \right)^{\varepsilon-1} k^{-\frac{(\varepsilon-1)}{\varepsilon}}}{\gamma \left(\frac{1-\gamma}{\gamma} \right)^{\varepsilon-1} k^{-\frac{(\varepsilon-1)}{\varepsilon}} + (1-\gamma)} \frac{\dot{k}}{k} \quad (II)$$

Puisque nous partons de $\frac{\dot{M}}{M} > 0$, l'équation (II) implique que $\frac{\dot{k}}{k} > 0$.

Rappelons que $\varepsilon \in [0, \infty[$.

Compte tenu de la présence du paramètre³³ ε , deux cas vont se poser.

Cas $\varepsilon > 1$

L'existence d'accumulation du capital et de progrès technique en direction du capital (Catc), comme souligné ci-dessus entraîne une augmentation du ratio k . Etant donné que l'élasticité est supérieure à 1, les biens intermédiaires intensifs en capital qui ont augmenté relativement aux biens intensifs en travail deviennent relativement moins coûteux que ces derniers et vont progressivement être substitués aux biens finals intensifs en travail, ce qui fait croître le ratio k et donc le prix du capital vers 0 donc le prix relatif des biens finals intensifs en capital vers 0. Cette analyse s'obtient en observant dans la relation (II) que lorsque l'élasticité est supérieure à 1, il y a d'abord le fait que $\frac{\dot{k}}{k}$ augmente.

Cette augmentation fait donc que k augmente. Simultanément, $k^{\frac{(\varepsilon-1)}{\varepsilon}}$ tend vers 0 de même que le numérateur de la relation (II) à une rythme plus rapide que le dénominateur, quelle que soit γ . Au total le prix des biens intensifs en capital tend donc vers 0 d'après la relation (II).

La relation (I) ne tient plus dans le régime équilibré puisque $\frac{\dot{M}}{M} > 0$ et $\frac{\dot{P}_{HTIC-K}}{P_{HTIC-K}} = 0$.

Cas $\varepsilon < 1$

Toujours en partant de la relation (II), la différence avec le cas précédent tient à ce que maintenant : $k^{\frac{(\varepsilon-1)}{\varepsilon}}$ tend vers l'infini ce qui rend le terme du milieu de l'expression (II) sans incidence sur la valeur limite du taux de croissance du prix du capital qui dépend des deux autres termes. En effet:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\gamma \left(\frac{1-\gamma}{\gamma} \right)^{\varepsilon-1} k^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}}{\gamma \left(\frac{1-\gamma}{\gamma} \right)^{\varepsilon-1} k^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (1-\gamma)} = 1 \quad \left(\text{penser par exemple à } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x} = 1 \right)$$

Cela qui implique que:

$$\frac{\dot{P}_{HTIC-K}}{P_{HTIC-K}} \rightarrow -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\dot{k}}{k} < 0$$

Contrairement au cas précédent on ne peut à ce stade affirmer une contradiction avec la relation (I). On peut même penser qu'il n'y en a pas. Il faut donc élucider $\frac{\dot{k}}{k}$ pour s'assurer que l'implication précédente est adéquate en régime équilibré.

³³ Nous ne sommes évidemment dans aucun des 3 cas extrêmes suivants: Une parfaite substituabilité matérialisée par une élasticité unitaire donc une Cobb-Douglas; une élasticité infinie donc une fonction de production linéaire; une élasticité nulle donc une Léontief.

Utilisons à cette fin, la dérivée logarithmique du ratio k , ce qui donne :

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{K}}{K} + \frac{\dot{M}}{M} - \frac{\dot{N}}{N} \quad \text{et sachant qu'en régime de croissance équilibrée on a :}$$

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{C}}{C} = \frac{\dot{K}}{K} = g$$

Ce qui en tenant compte de la relation (I) et de $\frac{\dot{p}_{HTIC-K}}{p_{HTIC-K}} \rightarrow -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\dot{k}}{k}$, donne :

$$\frac{\dot{M}}{M} = \frac{1}{\varepsilon} \left(g + \frac{\dot{M}}{M} - \frac{\dot{N}}{N} \right) = \frac{1}{\varepsilon - 1} \left(g - \frac{\dot{N}}{N} \right)$$

Par conséquent lorsque l'élasticité de substitution est inférieure à l'unité, $\frac{\dot{M}}{M}$ ne peut être positif que si le taux de progrès technique en direction du facteur travail (Latc) est supérieur aux taux de croissance g du régime d'équilibre.

A ce stade non plus, aucune contradiction ne peut être affirmée.

Remplaçons les équations (16) dans l'équation du produit global de l'économie (3):

$$Y = \left[\gamma (NL)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (1-\gamma) (MK)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} = A^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}$$

Passant en logarithmes puis dérivant par rapport au temps, on a:

$$\ln Y = \frac{\varepsilon}{\varepsilon-1} \ln A \Rightarrow \frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon-1} \left(\frac{\dot{A}}{A} \right)$$

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon-1} \left[\frac{\gamma \left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} \right) (NL)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}-1} (\dot{N}L + N\dot{L}) + (1-\gamma) \left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} \right) (MK)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}-1} (\dot{M}K + M\dot{K})}{A} \right]$$

Si nous remarquons qu'il est possible, de façon équivalente, de diviser les deux termes de la somme qui se trouve au numérateur de l'expression ci-dessus successivement par NL et MK et sachant que par hypothèse $\dot{L} = 0$, on a au final:

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\gamma \left(\frac{\dot{N}}{N} \right) (NL)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (1-\gamma) \left(\frac{\dot{K}}{K} + \frac{\dot{M}}{M} \right) (MK)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}}{\gamma (NL)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (1-\gamma) (MK)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}}$$

On peut facilement observer que si $\frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{N}}{N} = g$ et $\frac{\dot{M}}{M} = 0$ alors $\frac{\dot{Y}}{Y} = g$.

Cela correspondrait bien à une croissance équilibrée dont on voit qu'elle n'est pas compatible avec du Catc mais seulement du Latc.

Nous avons fait remarquer à une étape antérieure que l'existence Latc autorisait l'existence de Catc mais qu'alors le taux de Latc devait être supérieur au taux de croissance g de l'économie. C'est ici que va apparaître l'absurdité de l'hypothèse de

Catc dans ce cas. En effet si nous avons $\frac{\dot{N}}{N} > g$ et donc avec l'hypothèse de départ

$\frac{\dot{M}}{M} > 0$, le taux de croissance de l'économie serait plus grand que g .

Ceci montre alors l'inexistence de croissance équilibrée puisque les autres variables (consommation, capital, salaires (pour les salaires, cf équation 17 sachant que n croît au taux³⁴ $\frac{g\beta}{1-\beta}$ (ou N croît au taux g , ce qui revient au même) afin de maintenir p constant dans l'équation 18) croissaient au taux g .

L'inexistence de croissance équilibrée est bien due à l'impossibilité de progrès technique en direction des produits Hors-TIC, progrès qui, comme expliqué à la sous-section 4.2.1, contribuerait à doubler les sources de progrès pour ces produits.

Cherchons à présent la valeur d'un brevet ou valeur de l'invention d'un nouveau bien intensif en travail ou en capital en effectuant les intégrales³⁵ telles que données dans les équations (19).

4.3 La détermination de la condition de non-arbitrage sur le sens de l'orientation du progrès technique en régime de croissance équilibrée

Avant de déterminer la condition de non-arbitrage dans l'investissement en recherche, il est nécessaire de calculer la valeur du brevet qu'achète chaque monopoleur du secteur intermédiaire au secteur de la recherche:

³⁴ Pour démontrer ce taux du nombre de variétés de biens intermédiaires intensifs en travail, prenons le logarithme de (16): $\ln Y_{TIC-L} = \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right) \ln n + \ln L$ d'où nous dérivons par rapport au temps pour obtenir en

régime de croissance équilibrée: $g = \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right) \frac{\dot{n}}{n} \Leftrightarrow \frac{\dot{n}}{n} = \frac{g\beta}{1-\beta}$.

³⁵ En appliquant la formule de la dérivée suivante, appropriée pour les intégrales de la forme (19):

$$\frac{\partial F(x, u)}{\partial x} = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial F(x, u)}{\partial x} du + b'(x)F(x, b(x)) - a'(x)F(x, a(x)).$$

$$V_{ticl}(t) = \int_t^{\infty} \exp^{-\int_t^s ((r(\omega) + \delta) d\omega)} \pi_{ticl}(s) ds$$

$$\dot{V}_{ticl}(t) = (r(t) + \delta) \int_t^{\infty} \exp^{-\int_t^s ((r(\omega) + \delta) d\omega)} \pi_{ticl}(s) ds - \exp^{-0} \pi_{ticl}(t)$$

$$\dot{V}_{ticl}(t) = (r(t) + \delta) V_{ticl}(t) - \pi_{ticl}(t)$$

Le rendement du brevet est donc constitué de la plus-value en capital $\left(\frac{\dot{V}_{ticl}(t)}{V_{ticl}(t)} \right)$ et du taux de profit $\left(\frac{\pi_{ticl}(t)}{V_{ticl}(t)} \right)$. Comme chez Romer.P [1990], le marché des brevets est supposé concurrentiel et la valeur d'équilibre du brevet est constante dans le temps ($\dot{V}(t) = 0$), ce qui fait que cette équation exprime qu'à l'équilibre (de long terme) on a :

Un profit $\pi_{ticl}(t) = (r(t) + \delta) V_{ticl}(t) \quad \forall t$, soit alors une valeur du brevet telle que :

$$V_{ticl}(t) = \frac{\pi_{ticl}(t)}{(r(t) + \delta)} \quad \forall t \quad (\text{idem pour le secteur Hors-TIC})$$

Puisque l'on impose une condition de croissance équilibrée, la valeur du brevet devra tenir compte du taux de croissance équilibrée de chaque composant de la formule précédente. Ainsi, nous savons que sur le sentier de croissance équilibrée :

w et K croissent au taux g , n croît au taux $\frac{\beta g}{(1 - \beta)}$ tandis que m est constant.

Tenant compte de ces différents taux dans le calcul des intégrales (19) on a alors :

$$(22) \quad V_{ticl} = \frac{1 - \beta}{\beta} \frac{wL/n}{r + \delta - (1 - 2\beta)g/(1 - \beta)} \quad \text{et par analogie pour l'autre secteur:}$$

$$(22) \quad V_{hick} = \frac{1 - \beta}{\beta} \frac{rK/m}{r + \delta - g}$$

En combinant (21) avec (22) on peut écrire que :

$$w_s = \max \left\{ \frac{1 - \beta}{\beta} b_l \frac{wL}{r + \delta - (1 - 2\beta)g/(1 - 2\beta)}, \frac{1 - \beta}{\beta} b_k \frac{rK}{r + \delta - g} \right\}$$

Etant donné que nous venons de voir qu'en croissance équilibrée, il n'y a pas de progrès technique en direction des biens intermédiaires Hors-TIC, nous pouvons en nous servant de (8) trouver le nombre de "scientifiques" juste nécessaire et qui est :

$$S_{htick} = \frac{\delta}{b_{tick}}$$

Si le nombre dépasse alors il y a progrès technique en direction des biens Hors-TIC. Ce nombre ne doit cependant pas être inférieur en raison de l'obsolescence des techniques. Le nombre de "scientifiques" restant ira dans le secteur des TIC.

Comme déjà dit, le taux de croissance du nombre de biens intermédiaires TIC est :

$$\frac{\dot{n}}{n} = \frac{g\beta}{(1-\beta)} \Rightarrow g = \left(\frac{1-\beta}{\beta} \right) \frac{\dot{n}}{n} \text{ Ce qui, remplacé dans (8) nous permet d'écrire que :}$$

$g = \frac{1-\beta}{\beta} (b_l(S - S_{htick}) - \delta)$ et en remplaçant S_{htick} par $\frac{\delta}{b_{htick}}$, on obtient le taux de croissance de l'économie en fonction des seuls paramètres du modèle:

$$(23) \quad g = \frac{1-\beta}{\beta} \left(b_l S - \frac{(b_{tick} + b_{htick})}{b_{htick}} \delta \right)$$

Afin d'éviter la décroissance économique, une condition sur S devra être respectée:

$$S \geq \frac{\beta}{1-\beta} \frac{(b_{tick} + b_{htick})}{b_{htick} b_{tick}} \delta$$

Comme cela est indiqué dans l'équation d'Euler pour la consommation, celle-ci qui doit évoluer au rythme g donné par (23) en croissance équilibrée réagit d'autant plus à l'écart entre le taux de l'intérêt et le taux de préférence pour le présent que l'élasticité de substitution intertemporelle est grande.

Ainsi, puisque le taux de préférence présent (qui incite à consommer aujourd'hui) est donné, le taux de l'intérêt (qui incite à consommer demain) devra être plus élevé lorsque g est élevé afin de convaincre (il y a une meilleure rémunération de l'épargne en cas de taux élevé) les agents de différer leur consommation et permettre de se maintenir en croissance équilibrée. L'élasticité de substitution intertemporelle de la consommation indiquera l'ampleur de l'ajustement du taux de l'intérêt.

Nous souhaitons à présent passer au calcul de la part relative du capital $\left(\frac{rK}{wL} \right)$ et dans cette optique, l'équation (17) en utilisant dans cet ordre le fait que $k = \frac{MK}{NL}$, l'équation (12) puis (18) et puis (11) et (16) peut-être encore écrite comme:

$$(25) \quad r = R(M, k) = \beta M \left[\gamma \left(\frac{1-\gamma}{\gamma} \right)^{\varepsilon-1} k^{-\left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} \right)} + (1-\gamma) \right]^{\frac{1}{\varepsilon-1}}$$

Etant donné que l'on se situe en régime de croissance équilibrée, le taux d'intérêt étant alors une constante, il y a dans la relation (25) une relation implicite entre k et M . Cette relation entre ces deux variables qui a donc la particularité de satisfaire la condition de croissance équilibrée est telle que: $k = F(M)$ et $F' > 0 \quad \forall \varepsilon \in [0, \infty[$

Nous redonnons la définition de la part relative du capital:

$$\sigma_K = \frac{rK}{wL}$$

Nous introduisons à ce stade des relations dynamiques entre, d'un côté la rémunération absolue du capital et le nombre de produits Hors-TIC et d'un autre celle du travail et le nombre de produits du secteur TIC. On peut alors écrire que l'évolution de la part relative du capital dépendra de l'abondance relative des biens (on parlera de façon équivalente d'intensité capitaliste) issus des deux secteurs. Le sens de la relation dépendant de la valeur de l'élasticité de substitution (ε) entre les deux biens.

$$\dot{\sigma}_K = \frac{\dot{rK}}{\dot{wL}} = f_\varepsilon\left(\frac{\dot{m}}{\dot{n}}\right)$$

Revenons à la part factorielle et cherchons à l'exprimer en fonction de l'intensité capitaliste k :

A ce but, effectuons le rapport des équations (17):

$$\frac{r}{w} = \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1-\beta}{\beta}} \left(\frac{P_{HTIC-K}}{P_{TIC-L}}\right) \Rightarrow \sigma_K = p \left(\underbrace{\left(\frac{K}{L}\right)\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{1-\beta}{\beta}}}_k\right) \Rightarrow \sigma_k = pk$$

Et en remplaçant le prix relatif des biens intensifs en capital par sa valeur en (18):

$$(26) \quad \sigma_k = \left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right) k^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}}$$

(26) dépend comme déjà dit de l'intensité capitaliste mais également de l'élasticité de substitution entre les deux catégories de biens.

Définissons une "abondance relative d'indifférence" (ou de façon équivalente "intensité capitaliste d'indifférence") telle que si l'économie en question dispose de cette intensité, les firmes de la recherche deviennent indifférentes entre Latc et Catc.

Nous y reviendrons plus longuement, mais pouvons dire que ce moment d'indifférence survient lorsque la contribution marginale maximale d'un "scientifique" à la valeur de l'invention d'un nouveau bien intermédiaire TIC devient égale à cette valeur dans le secteur Hors-TIC, ce qui se matérialise par:

$b_{ticl}nV_{ticl} = b_{htick}mV_{htick}$, ce qui par application aux équations (22) donne:

$$wLb_{ticl}(r + \delta - g) = rKb_{htick}\left(r + \delta - (1 - 2\beta)\frac{g}{(1 - \beta)}\right)$$

Comme $\sigma_k = \frac{rK}{wL} = b$ en situation de non-arbitrage, nous isolons ce rapport de l'égalité ci-dessus dans un premier temps. Dans un second, comme nous nous situons sur le sentier d'équilibre nous remplaçons tout r (excepté bien entendu celui qu'on a dans σ_k) par sa valeur compatible avec l'équilibre indiqué par l'équation (9) soit : $r_{eq} = \rho + \theta g$ et on a la condition de non-arbitrage sur le sens de progrès technique:

$$(27) \quad \sigma_k = \frac{b_{ticl}(1 - \beta)(\rho + \delta + (\theta - 1)g)}{b_{htick}((1 - \beta)(\rho + \delta) + ((1 - \beta)(\theta - 1) + \beta)g)} = b$$

En combinant avec l'équation (26) nous réécrivons l'abondance capitaliste d'indifférence (ou intensité capitaliste d'indifférence) associée:

$$(28) \quad k^* = \left(\frac{b\gamma}{1 - \gamma}\right)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon - 1}}$$

En reprenant la relation $k = F(M)$ et sachant qu'au niveau de non arbitrage, la part relative de capital et l'abondance capitaliste sont données par (27) et (28), on devrait avoir un niveau associé de biens intermédiaires Hors-TIC ou frontière technologique associée M^* . Ce niveau³⁶ doit également comme cela fut démontré à la sous-section 4.2.2, rester constant en croissance équilibrée.

Il est cependant utile de garder à l'esprit que l'existence de dépréciation des techniques implique que pour maintenir M à son niveau M^* , il faille réaliser du progrès technique compensatoire en direction des biens intermédiaires Hors-TIC.

En l'absence d'un progrès technique de cette nature impliquerait que $\frac{\dot{M}}{M} < 0$ dont il a été démontré l'incompatibilité avec une croissance équilibrée. Dit autrement les firmes de la recherche ne délaisseront³⁷ aucun secteur. Pour que cela se fasse il est nécessaire que $b_{ticl}nV_{ticl} = b_{htick}mV_{htick}$ or cette condition est celle de non-arbitrage qui vient d'être discutée. En conséquence la condition de non-arbitrage est une condition nécessaire et suffisante à la croissance équilibrée.

Les valeurs trouvées en (27), (28) ainsi que celles issues de la relation implicite en régime équilibré entre l'intensité capitaliste et la frontière technologique sont fondamentales pour l'étude du sentier équilibré.

³⁶ Remarquons que si nous n'étions pas en régime équilibré, la valeur de M ne serait ni la même (puisque le taux d'intérêt ne serait pas le même), ni bien entendu obligatoirement constante.

³⁷ Mais il s'agit uniquement d'un progrès technique compensatoire dont l'issue consiste à maintenir l'économie sur la frontière technologique compatible avec le régime de croissance équilibrée.

Avec ces valeurs, il sera possible de montrer que non seulement le sentier d'équilibre exhibe du progrès technique en direction du secteur TIC mais que ce sentier est unique lorsqu'il y a dépréciation des techniques ($\delta > 0$).

4.4 Croissance équilibrée en présence de dépréciation des techniques

Nous indiquions que la condition de non-arbitrage était consubstantielle à la croissance équilibrée or ceci implique que la part relative du capital soit constante (ce qui ne signifie bien évidemment pas que la part du capital reste constante).

Pour maintenir constante cette part factorielle 4 choses doivent être considérées:
 La dite dépréciation des techniques, l'accumulation du capital, le $Catc$ et le $Latc$.
 Sur le sentier de croissance équilibrée, le raisonnement est le suivant:

La part relative du capital doit rester constante. Cela implique que l'incitation des firmes à faire de la recherche devrait être la même entre les deux secteurs. Cependant la dépréciation des techniques modifie à la baisse le niveau M^* de la frontière technologique compatible avec le sentier équilibré.

Il est donc nécessaire que se réalise du $Catc$ mais juste suffisamment pour compenser l'effet négatif de la dépréciation sur la frontière technologique. En raison des rendements marginaux décroissants dans la recherche et de l'effet *spillovers* de la recherche passée, l'abaissement de la frontière technologique pourrait améliorer les perspectives de profits³⁸ des firmes de la recherche Hors-TIC. Elles investissent donc à la fois dans la recherche du $Catc$ de type compensatoire et dans celle de $Latc$, de sorte que la condition de non-arbitrage suivante prévale:

³⁸ Une autre modélisation, sans doute plus proche de l'intuition, pourrait représenter la productivité marginale des chercheurs comme une fonction décroissante du nombre de chercheurs. Il est souhaitable de ne pas confondre cet effet avec l'effet d'échelle "*standing on the shoulders of giants*". Les deux sont compatibles.
 En croissance équilibrée, l'absence de $Catc$ signifie qu'aucun "scientifique" n'opère dans le secteur Hors-TIC.
 Pour réaliser du progrès technique juste compensatoire, il est intuitif qu'il faut avoir besoin de moins de "scientifiques" que ce qui est requis pour faire du progrès technique net. Puisque l'on demeure en-dessous de la frontière technologique, les *spillovers* de la recherche passée ont déjà produit leurs effets et jouent positivement dans les perspectives de profits par le truchement de la productivité décroissante des chercheurs. Nous supposons donc qu'implicitement les effets positifs des *spillovers* dans le secteur de la recherche, une fois acquises ne se perdent pas, ni se déprécient. Si cette formalisation des *spillovers* est critiquable, nous pourrions affirmer qu'il serait sans doute également plus pertinent de se placer non pas dans un cadre de croissance endogène mais semi-endogène comme l'illustre l'équation de Jones. C.I [1995] "*R&D Based Models of Economic Growth*", *Journal of Political Economy*, vol 103, pp 758-784 où la productivité des innovations qui apparaît, décroîtrait ainsi:

$$\frac{innov_t}{tech_{t-1}} = \alpha \frac{IRD_t^\rho}{SE_t} \quad \text{où} \quad innov_t \text{ est le nombre d'innovations en } t, SE_t = (tech_{t-1})^\beta, \beta > 0 \text{ un indice}$$

rendant compte de la difficulté dans la recherche, IRD_t l'investissement en volume dans la recherche et ρ un paramètre indiquant la possibilité ou non d'appropriation ou de copiage de la recherche.

On peut se référer à une autre version de croissance semi-endogène formulée dans "*Semi Endogenous Growth in a Computable General Equilibrium Approach*", *Computing in Economics and Finance*, vol 232, *Society for Computational Economics* de Fougereyrollas. A., Le Mouél. P et Zagamé. P [2001] sans duplication dans la recherche mais avec *spillovers*-intersectoriels (inexistants, à ce stade, dans le présent modèle).

Dans ces deux dernières versions on pourrait dire que l'abaissement de la frontière technique améliore les perspectives de profits puisque l'effet d'échelle est décroissant traduisant qu'on est de plus en plus sur des épaules de "nains" dans la recherche.

$$b_{ticl} nV_{ticl} = b_{htick} mV_{htick}$$

L'accumulation du capital au taux g est quant à elle contrebalancée par le progrès technique TIC.

C'est au total ce qu'il se passe le long de l'unique sentier équilibré et en récapitulatif, celui-ci présente les propriétés suivantes:

Un progrès technique exclusivement harrodien au taux g , du progrès technique solowien de compensation dont l'ampleur est déterminée par le taux de dépréciation des techniques, des salaires croissants au taux g , une accumulation de capital au taux g , un taux d'intérêt d'équilibre donné par l'équation d'Euler et tel que $r_{eq} = \rho + \theta g$, une consommation et un produit global croissant au taux g également.

4.5 Croissance équilibrée sans dépréciation des techniques

Il a été montré que seul du progrès technique dans le secteur TIC était compatible avec le régime équilibré. Ici, la condition de non-arbitrage n'a plus lieu d'être vérifiée puisqu'il n'y a plus nécessité de faire de la recherche dans les deux secteurs étant donné justement l'absence de dépréciation des techniques.

La condition est simplement qu'il n'y ait pas du tout de progrès technique dans le secteur Hors-TIC. A cette fin il est simplement requis que l'investissement marginal (l'apport du "scientifique" marginal à la valeur d'invention du nouveau bien intermédiaire) en recherche TIC soit strictement supérieur à l'investissement dans le secteur Hors-TIC. Ce qui est équivalent à ce que :

$$b_{ticl} nV_{ticl} > b_{htick} mV_{htick}$$

L'inégalité ci-dessus pouvant être vérifiée par divers niveaux de la frontière technologique $M \geq M^* = F^{-1}(k^*)$ on conclut à l'existence d'une multiplicité de sentiers de croissances équilibrées. Comme le niveau existant de biens intermédiaires TIC et Hors-TIC est différent pour chacun d'entre eux, la part relative du capital en régime équilibré sera aussi différente.

5. Stabilité autour de l'état stationnaire: La dynamique transitionnelle

La question consiste à savoir si l'équilibre en présence de dépréciation des techniques ou les équilibres sans dépréciation sont stables. Il n'est cependant pas utile d'étudier la stabilité sans dépréciation puisqu'on a souligné à son propos qu'elle se concevait simplement comme une multitude de sentiers équilibrés en présence de dépréciation. La question consiste donc à savoir ce qu'il advient lorsque l'on se trouve avec une part relative de capital $\sigma_b \neq b$; Y retourne-t-on ? La recherche de réponse sera effectuée en supposant $\delta > 0$ et $\varepsilon < 0$.

5.1 Mise en évidence d'une discontinuité d'allocation des chercheurs

Nous rappelons qu'au total,voici ce qu'il se passe le long de l'unique sentier équilibré:

Un progrès technique exclusivement harrodien au taux g ,du progrès technique solowien de compensation dont l'ampleur est déterminée par le taux de dépréciation des techniques,des salaires croissants au taux g ,une accumulation de capital au taux g ,un taux d'intérêt d'équilibre donné par l'équation d'Euler et tel que $r_{eq} = \rho + \theta g$, une consommation et un produit global croissant au taux g également.

Afin d'approcher la manière dont le fonctionnement du modèle mène à l'obtention de ces caractéristiques il est possible³⁹ d'utiliser les équations de deux variables d'état M et k (intensité capitaliste) et d'une variable de contrôle $c = \frac{C}{K}$. Cette écriture de l'équation de consommation permet de s'assurer que nos trois variables sont constantes en régime équilibré. En prenant la dérivée logarithmique de k , nous pouvons écrire:

$$\frac{\dot{k}}{k} = \frac{\dot{K}}{K} + \frac{\dot{M}}{M} - \frac{\dot{N}}{N} \quad \text{or en économie fermée, le produit dans l'optique dépense s'écrit:}$$

$Y = C + I = C + \dot{K}$ et en divisant par K on peut écrire de façon identique :

$\frac{\dot{K}}{K} = \frac{Y - C}{K}$ et en remplaçant Y par sa valeur donnée dans (3) puis en y apportant le changement d'écriture du fait des équations (16) on peut écrire le premier terme de la dérivée de l'intensité capitaliste comme:

$$\frac{\dot{K}}{K} = \frac{\left[\gamma (NL)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (1-\gamma)(MK)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} \right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} - C}{K}$$

En combinant les dérivées logarithmiques de $M = m^{\frac{1-\beta}{\beta}}$ et $N = n^{\frac{1-\beta}{\beta}}$ avec les équations (8) il est possible d'exprimer les deux autres termes comme :

$$\frac{\dot{M}}{M} - \frac{\dot{N}}{N} = \frac{1-\beta}{\beta} (b_{htick} S_{htick} - b_{tiel} S_{tiel}) = \frac{1-\beta}{\beta} (b_{tiel} S - (b_{tiel} + b_{htick}) S_{htick})$$

puisque $S = S_{tiel} + S_{htick}$. Finalement:

³⁹ Le choix et le nombre des équations différentielles à utiliser déterminent la nature (monotone ou plus riche) des dynamiques d'ajustement vers l'équilibre.

$$(29) \quad \frac{\dot{k}}{k} = M \left[\gamma k^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (1-\gamma) \right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} - c - \left[\frac{1-\beta}{\beta} (b_{tict} S - (b_{tict} + b_{htick}) S_{htick}) \right]$$

(29) montre les 3 autres variables endogènes (c, M, S_{htick}) permettant de caractériser le fonctionnement du modèle. Ecrivons alors la dérivée logarithmique de c :

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{\dot{C}}{C} - \frac{\dot{K}}{K}$$

Remplaçons la dynamique de la consommation par l'équation (9) dans laquelle on remplace d'abord le taux d'intérêt par sa valeur d'équilibre donnée par l'équation (25):

$$\frac{\dot{C}}{C} = \theta \left[M \beta \left(\gamma \left(\frac{1-\gamma}{\gamma} \right)^{\varepsilon-1} k^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (1-\gamma) \right) - \rho \right]^{\frac{1}{\varepsilon-1}}$$

et en tenant compte de la dynamique du stock de capital obtenue précédemment :

$$(30) \quad \frac{\dot{c}}{c} = \theta \left[M \beta \left(\gamma \left(\frac{1-\gamma}{\gamma} \right)^{\varepsilon-1} k^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (1-\gamma) \right) - \rho \right]^{\frac{1}{\varepsilon-1}} - M \left[\gamma k^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (1-\gamma) \right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} + c$$

Enfin, la troisième équation qui est source de discontinuité est d'obtention plus directe puisqu'il suffit d'utiliser l'équation (8) et le fait que $M = m^{\frac{1-\beta}{\beta}}$, ce qui aboutit à:

$$(31) \quad \frac{\dot{M}}{M} = \frac{1-\beta}{\beta} (b_{htick} S_{htick} - \delta)$$

Ce système de trois équations différentielles indépendantes qui permet d'analyser la dynamique transitionnelle du modèle montre l'apparition d'une quatrième variable en l'occurrence le nombre de chercheurs dans le secteur Hors-TIC: S_{htick} . En conséquence, on a 4 variables, soit: k, c, M et S_{htick} . Il y a donc sous-détermination qu'on cherche à lever en trouvant une relation entre le nombre de chercheurs affectés au secteur Hors-TIC et k . De cette relation, il ressortira que le comportement des chercheurs trouve son pendant dans celui de l'intensité capitaliste.

5.2 Répartition inter-sectorielle des chercheurs en dehors du régime d'équilibre

La question à laquelle il faut maintenant se consacrer consiste à savoir comment les chercheurs se répartissent entre les deux secteurs lorsque l'équilibre est rompu.

Nous proposons avant de commencer à répondre, de revenir sur l'explication de la relation entre σ_k et k en fonction de l'élasticité de substitution ε , soit la relation (26).

En réponse à une augmentation de k , σ_k diminue lorsque $\varepsilon < 1$.

En effet lorsque k augmente, le nombre de biens du secteur Hors-TIC augmente relativement au nombre de biens du secteur TIC. Cela a pour conséquence de réduire le coût relatif de la production de biens du secteur Hors-TIC. Cependant comme l'élasticité entre ces biens et ceux du secteur TIC est inférieure à l'unité, les biens sont plutôt complémentaires. Comme la productivité des biens du secteur Hors-TIC a augmenté, il est possible d'utiliser moins de ces biens intermédiaires pour une même production qu'avant. Cela n'est pas le cas pour les biens TIC qui compte tenu de la structure complémentaire des facteurs doivent continuer à être utilisés autant qu'avant c'est-à-dire pour une production inchangée. C'est pourquoi σ_k diminue.

Les équations (15) montrent que si substitution il pouvait y avoir, m pourrait remplacer n (et inversement si nous avions supposé que k avait baissé) et comme les biens du secteur Hors-TIC sont devenus plus productifs, on peut les substituer dans la production des TIC. Par conséquent, tout se passe comme si le coût relatif du capital dans la production des deux types de biens intermédiaires avait augmenté.

C'est pourquoi lorsque l'élasticité de substitution entre les deux biens des deux secteurs est supérieure à l'unité, σ_k augmente avec k .

Pour illustrer, partons d'une rupture précise du régime de croissance équilibrée. Supposons que cette rupture est telle que: $\sigma_k > b$ et cherchons si celle-ci peut être compatible avec le fait que :

$$b_{ticl} nV_{ticl} > b_{htick} mV_{htick}$$

S'il en était ainsi, tous les chercheurs iraient travailler dans le secteur des biens TIC puisque leur contribution marginale y est plus grande.

D'après l'équation (8), cela impliquerait que $\frac{\dot{m}}{m} < 0$ et en tenant compte de la relation

implicite (déduite à partir de (25) qui pour rappel est $k(t) = F(M(t))$ on peut dire que $\dot{k}(t) < 0$ et considérant la discussion précédente sur la relation entre k et σ_k , on peut affirmer que dans le cas où l'élasticité de substitution entre les biens est inférieure à l'unité, $\dot{\sigma}_k(t) > 0$, ce qui⁴⁰, tant que $b_{ticl} nV_{ticl} > b_{htick} mV_{htick}$ ferait tendre le coût relatif du

capital vers l'infini et donc $\frac{\dot{M}(t)}{M(t)}$ et $\frac{\dot{k}(t)}{k(t)}$ vers 0.

Ce résultat reste jusqu'ici envisageable même s'il ne ramène pas le système vers le régime équilibré. Rappelons cependant que ce résultat divergeant a été obtenu moyennant une condition précise et imposée à savoir $b_{ticl} nV_{ticl} > b_{htick} mV_{htick}$.

⁴⁰ On devrait en principe chercher à réduire la part croissante du facteur capital mais étant donné la meilleure rentabilité que nous avons imposée par hypothèse dans le secteur des produits TIC, le secteur de la recherche Hors-TIC ne produit rien faute de chercheurs. En effet ceux-ci ont donc par hypothèse une contribution marginale plus grande dans la recherche de produits TIC.

Nous cherchons maintenant à savoir, ce qu'il se passe lorsqu'aucune condition de ce type n'est imposée. Dit autrement, on se demande simplement si la situation ci-dessous est possible dans le régime de transition.

$\sigma_k > b, b_{tiel} nV_{tiel} > b_{htick} mV_{htick}$ et $\varepsilon < 1$ peuvent-ils coexister ?

Acemoglu.D [2003]⁴¹ fournit une réponse à cette interrogation. Il utilise pour cela un ratio qui ne considère donc aucune condition imposée. Ce ratio est :

$$\Delta(t) = \frac{m(t)V_{htick}(t)}{n(t)V_{tiel}(t)}$$

Ce ratio mesure, en régime de transition, l'évolution dans le temps du rapport de la valeur globale relative des m biens intermédiaires Hors-TIC par rapport à la valeur globale des n biens intermédiaires TIC.

En appliquant ce ratio aux intégrales (19) - à la remarque près que comme n'étant plus en régime de croissance équilibrée toutes les variables (mais pas les paramètres supposés donnés) peuvent varier - l'auteur parvient à prouver qu'au fur et à mesure que l'intensité capitaliste tend vers 0, ce ratio tend vers l'infini.

Ce résultat qui est obtenu avec une élasticité inférieure à 1 montre que la valeur globale relative des m biens intermédiaires Hors-TIC augmente au fur et à mesure que ces biens deviennent relativement moins abondants.

Il faudrait le comparer au résultat de la discussion précédente dont il était ressorti que l'on pouvait associer : $\lim_{t \rightarrow \infty} k(t) = 0$ et $b_{tiel} nV_{tiel} > b_{htick} mV_{htick}$ (inégalité imposée).

En introduisant le nouveau ratio, l'auteur montre que l'on devrait associer :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} k(t) = 0 \text{ et } b_{tiel} nV_{tiel} < b_{htick} mV_{htick} \text{ (quand } \varepsilon < 1)$$

Ce deuxième résultat non imposé va à l'encontre de la discussion précédente et montre l'impossibilité de concevoir à la fois :

$$\sigma_k > b \text{ et } b_{tiel} nV_{tiel} > b_{htick} mV_{htick} \text{ (quand } \varepsilon < 1)$$

En voici une tentative d'intuition économique ; On sait qu'au niveau de la condition de non arbitrage :

$$\sigma_K = b, k = k^* \text{ et } b_{tiel} nV_{tiel} = b_{htick} mV_{htick}$$

Lorsque $\sigma_k > b$, cela implique que $k < k^*$ ce qui en se remémorant la formule de k signifie qu'il y a dans l'économie, relativement moins de biens du secteur Hors-TIC. Cela a comme conséquence que le coût relatif de ces biens est supérieur à ce qu'il était au niveau de la condition de non-arbitrage. A ce niveau, il y a dans le modèle une

⁴¹ Le lecteur pourra consulter la section 7 de l'annexe de Acemoglu.D [2003] à la page 28. On y trouve le lemme A1 ainsi que sa preuve qui correspondent respectivement au ratio présenté ici et à la démonstration que celui-ci tend bien vers l'infini lorsque l'intensité capitaliste tend vers 0.

plus grande incitation à faire du progrès technique en direction des biens du secteur Hors-TIC. Or l'hypothèse $b_{ticl}nV_{ticl} > b_{htick}mV_{htick}$ indique que la valeur d'invention d'un nouveau bien du secteur TIC est plus élevée au moment même où le coût relatif du capital est plus élevé.

Il est contre intuitif de concevoir que pour le secteur des biens intermédiaires -qui détermine la valeur des brevets par actualisation des profits retirés de l'invention- la valeur d'invention d'un bien intermédiaire intensif dans un facteur dont le coût relatif est le plus élevé, puisse être moins grande que la valeur d'invention d'un autre bien intermédiaire. La valeur d'invention d'un bien intermédiaire donné ne peut donc être supérieure à celle d'un autre bien intermédiaire lorsque le premier est intensif dans un facteur dont le coût relatif de production est plus élevé.

La condition $b_{ticl}nV_{ticl} > b_{htick}mV_{htick}$ apparaît donc inadaptée en regard du fonctionnement du modèle.

Pour conforter ce cas de figure avec la théorie du progrès technique induit, on pourrait également faire appel à la critique de Jones, en relâchant l'hypothèse de rendements croissants des biens intermédiaires dans le secteur de la recherche, ce qui peut s'appréhender par l'existence d'une frontière technologique au fur et à mesure de laquelle on s'approche difficilement. Le progrès technique devient de plus en plus coûteux au fur et à mesure de son accélération. L'intérêt de faire du progrès technique sur le bien relativement moins abondant dans l'économie s'en trouve davantage renforcé.

Par conséquent, lorsque le nombre m de biens intermédiaires du secteur Hors-TIC est inférieur au nombre n de biens intermédiaires du secteur TIC, il est plus rentable car plus facile d'augmenter m que n . Remarquons que ce dernier paragraphe supposerait que l'on puisse modifier les paramètres b_{ticl} et b_{htick} en fonction du nombre de biens existants, ce qui n'est pas le cas dans la formulation de départ du modèle. Même si un tel amendement semble plausible dans des travaux ultérieurs.

En conclusion, une rupture de type $\sigma_k > b$ ne peut coexister qu'avec le cas où :

$$b_{ticl}nV_{ticl} < b_{htick}mV_{htick} \text{ (quand } \varepsilon < 1)$$

Par conséquent et en se remémorant, le sens de la relation (25) soit $k = F(M)$ ainsi que l'équation (26), on peut affirmer que lorsqu'à une date t on a, $\sigma_k(t) > b$, cela implique que $k(t) < k^*$, ce qui, tenant compte de la relation $k = F(M)$ implique à son tour que $M(t) < M^*$ et donc $S_{htick}(t) < S_{htick}^*$.

Ces implications qui ont lieu en phase transitionnelle du modèle confirment de façon intuitive la stabilité de l'équilibre mais qui devra être démontrée plus rigoureusement notamment par une linéarisation du système d'équations différentielles rencontrées la sous-section 5.1. Mais ce système était sous-déterminé. La section 6 s'occupera de sa linéarisation mais il fallait d'abord lever cette sous-détermination. Aussi et à cet effet, la présente sous-section montre bien l'existence d'une relation entre k et S_{htick} :

$$S_{htick}(t) = s^+(k(t))$$

5.3 De l'intérêt d'un lien entre nombre de chercheurs et intensité capitalistique

La précédente relation est fondamentale pour lever la discontinuité du système composé des équations (29),(30) et (31) en raison de cette dernière qui était la seule à ne pas dépendre de k .

Il faut à présent matérialiser la façon dont évolue cette relation lorsque l'on tient compte de la conclusion apportée en régime de transition du type $\sigma_k > b$.

On a vu que dans une telle configuration et par exemple dans le cas où $\varepsilon < 1$, on a :

$$b_{tiel} nV_{tiel} < b_{htick} mV_{htick}.$$

En ce cas, $k(t) < k^*$, implique que : $\frac{\dot{M}(t)}{M(t)} > 0 \Rightarrow \frac{\dot{k}(t)}{k(t)} > 0 \Rightarrow \frac{\dot{S}_{htick}(t)}{S_{htick}(t)} > 0$

Par analogie, il est alors possible de récapituler les 4 cas qui sont susceptibles de se produire en régime de transition:

Tableau Scénarios potentiels dans le régime de transition

Cas1 $\varepsilon < 1$ et $\sigma_k > b$	Cas2 $\varepsilon < 1$ et $\sigma_k < b$	Cas3 $\varepsilon > 1$ et $\sigma_k > b$	Cas4 $\varepsilon > 1$ et $\sigma_k < b$
$k < k^*$	$k > k^*$	$k > k^*$	$k < k^*$
$M < M^*$	$M > M^*$	$M > M^*$	$M < M^*$
$S_{htick} = S$	$S_{htick} = 0$	$S_{htick} = S$	$S_{htick} = 0$
$S_{tiel} = 0$	$S_{tiel} = S$	$S_{tiel} = 0$	$S_{tiel} = S$

Source: auteur

Commentaire:

Le cas 3 indique que lorsque la part relative du capital est supérieure à son niveau correspondant du régime équilibré et que les deux biens sont substituables, le nombre de chercheurs dans le secteur de la recherche en TIC est nul.

En effet lorsque la part relative du capital est plus importante qu'à l'équilibre, $b_{htick} mV_{htick} > b_{tiel} nV_{tiel}$, ce qui explique qu'aucun chercheur n'aille dans le secteur des tic. C'est pourquoi tous les chercheurs s'attèlent au secteur Hors-TIC, ce qui augmente le nombre de biens de ce secteur conformément à l'équation (8).

Le cas 1 se distingue du cas 3 du fait de la complémentarité supposée des biens.

De ce fait, lorsque le déséquilibre est de type $\sigma_k > b$, donc $k < k^*$ cette fois puisque comme déjà expliqué, le fait qu'il y ait davantage de biens du secteur TIC améliore la productivité de ces derniers dans leur production (leur coût relatif baisse) que l'on peut voir dans les équations (5) mais la contrainte de complémentarité des biens implique désormais d'associer moins de facteurs de production TIC mais autant de facteur Hors-TIC qu'avant (alors qu'il aurait dû y avoir moins de ce dernier facteur), ce

qui est de nature à augmenter la part relative de ce facteur. C'est la raison pour laquelle, tous les chercheurs se destinent au secteur des produits Hors-TIC. Ce qui est censé augmenter le nombre de biens Hors-TIC conformément à l'équation (8).

Les cas 1 et 3 aboutissent tous les deux à l'augmentation du nombre de produits du secteur Hors-TIC mais l'explication diffère en raison de la nature complémentaire ou substituable respectivement des biens. Par analogie, les cas 2 et 4 aboutissent tous les deux à l'augmentation du nombre de biens du secteur TIC. Dans les cas 1 et 2 notons l'existence d'une convergence vers l'équilibre initial $\sigma_k = b$ et une divergence dans les cas 3 et 4.

Remarquons enfin que la mobilité discontinue des chercheurs (soit tous sont dans les TIC, soit personne n'y est) liée aux termes de productivité posés constants est une hypothèse sans doute irréaliste. Il est cependant possible de rendre continu le déplacement des chercheurs entre les deux secteurs en supposant que le terme de productivité dans chaque secteur est une fonction croissante mais concave (productivité marginale décroissante) du nombre de chercheurs. De cette manière, les mouvements de chercheurs d'un secteur vers l'autre augmentent la productivité dans le secteur de départ, ce qui autorise, à partir d'un certain seuil d'arrivée, que la productivité dans le secteur d'arrivée décline et rejoint celle du secteur de départ. A ce moment, on retrouverait le régime de croissance équilibrée ou la divergence évoqués mais à un rythme moins "brutal" que dans le cas de la discontinuité.

Le fait d'avoir mis en évidence une relation entre S_{htick} et k lève la difficulté qui se trouvait dans le système d'équations (29), (30) et (31) et qui rendait non linéarisable le système puisque (31) était discontinue. La difficulté étant levée grâce à l'existence d'une relation entre S_{htick} et k va permettre donc d'affirmer que le système (29), (30) et (31) qui décrit correctement la dynamique du modèle est désormais linéarisable. Comme nous venons de le dire, le système est stable mais la linéarisation montrera qu'il s'agit seulement d'une stabilité au sens du point-selle. L'élasticité de substitution entre les biens des deux secteurs jouant un rôle déterminant dans l'étude du régime transitionnel, nous rappelons encore les mécanismes en jeu dans le cas de la stabilité et de l'instabilité respectivement:

Cas où $\varepsilon < 1$

Le régime de croissance équilibré exige que $\sigma_k = b$.

Lorsque l'élasticité de substitution entre les biens est inférieure à 1, la part relative du capital évolue inversement avec k . La théorie du progrès technique induit signifie que lorsque par exemple $\sigma_k > b$, il s'ensuit $b_{htick} mV_{htick} > b_{ticl} nV_{ticl}$ et que donc le progrès technique se fasse en direction du secteur des biens Hors-TIC. En cas de succès, le résultat en est une augmentation de k , ce qui améliore la productivité du facteur Hors-TIC et autorise d'en combiner moins avec un même volume de facteur TIC pour sur une même isoquante. C'est la raison pour laquelle σ_k diminue et converge vers la valeur d'équilibre initial.

Cas où $\varepsilon > 1$

Lorsque l'élasticité de substitution entre les biens est supérieure à 1, la part relative du capital évolue dans le même sens que k . La substitution factorielle "remplace" la théorie du progrès technique qui n'a plus de raison d'être. Lorsque par exemple un déséquilibre de type $\sigma_k > b$ se produit, cela signifiant que $k > k^*$ et donc que la productivité du facteur Hors-TIC est plus élevée, ce qui milite en faveur d'une substitution de ce facteur au facteur TIC. C'est la raison pour laquelle σ_k augmente encore et diverge de sa valeur d'équilibre.

Cependant, comme déjà noté le système composé des trois équations reste soumis à des variations extrêmes de la population de chercheurs selon que $k > k^*$ ou non. S'il était possible de rendre continues ces variations, l'étude du système en régime transitionnel en serait grandement facilitée dans le sens où il serait mathématiquement et non économiquement résolu comme cela l'est jusqu'ici.

6. Méthode pour la linéarisation du système d'équations différentielles

6.1 L'introduction d'une dispersion de productivités dans la recherche

Jusqu'ici, le système d'équations différentielles {(29), (30) et (31)} n'a pas été linéarisé autour des valeurs d'équilibre des trois variables k, c et M .

Pour arriver aux résultats précédents, nous avons procédé tout le temps en considérant les variables en binôme, ce qui au passage peut également se faire sous la forme de diagramme de phase par exemple entre M et k , entre S_{hick} et k etc..

Mais dès lors que l'on envisage des systèmes tridimensionnels, l'étude graphique devient lourde et requiert un arsenal géométrique, dont à notre connaissance, il n'existe pas fréquemment pour une très grande part parce que leur étude analytique donnerait des résultats géométriquement cohérents.

La linéarisation est l'outil de résolution analytique qui sera utilisé dans cette section, mais seulement après avoir résolu la question de la discontinuité de la répartition des chercheurs entre les deux secteurs tel qu'elle apparaît au niveau de l'équation (31). Une fois linéarisé, il sera possible de se prononcer sur la stabilité du système. Toutefois, comme l'analyse de la section précédente a pu l'annoncer, on s'attend à ce que la linéarisation autour de l'état stationnaire conclut à une stabilité au sens du point-selle, par définition locale et entendue comme dépendant aussi de la nature complémentaire (convergence) ou substituable (divergence) des biens.

Quitte à insister, l'idée ici est d'arriver à une réallocation intersectorielle des chercheurs moins brutale que ne le montre l'équation (31) et le raisonnement de la section précédente. C'est donc sur cette équation que s'opérera la modification. Cette modification concernera d'abord la relation trouvée précédemment entre S_{hick} et k .

Soit Ω , une variable aléatoire indépendante représentant la rémunération de chaque chercheur selon sa productivité marginale dans l'invention de nouveaux biens du secteur TIC et du secteur Hors-TIC. Soit $\Gamma(\Omega)$, la fonction de répartition de Ω .

Supposons qu'un chercheur donné, rémunéré Ω , avec Ω pouvant prendre n'importe quelle valeur dans la fonction de répartition $\Gamma(\Omega)$, soit en mesure de contribuer avec un terme b_{iicl} à l'accroissement d'une unité de produit TIC mais avec un terme $(1 + \Omega)b_{hick}$ à l'accroissement d'une unité de produit Hors-TIC.

La condition de non-arbitrage rencontrée précédemment, s'écrit désormais:

$$b_{ticl} n V_{ticl} = (1 + \Omega) b_{htick} m V_{htick}$$

Lorsque les contributions marginales du chercheur sont identiques entre les deux secteurs de recherche, celui-ci est indifférent quant à aller dans l'un ou l'autre.

En revanche, lorsque par exemple $b_{ticl} n V_{ticl} < (1 + \Omega) b_{htick} m V_{htick}$ ou ce qui revient au même $\sigma_k > (1 + \Omega)b$ (lorsque $\varepsilon < 1$), ou encore⁴² $k < k^* (1 + \Omega)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}$, il ira vers le secteur de la recherche Hors-TIC.

L'idée introduite consiste à voir qu'avec par exemple $k < k^* (1 + \Omega)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}$, le déséquilibre est désormais bien influencé selon la valeur prise par la variable aléatoire. On peut dire qu'en régime de transition, il existera une valeur critique de la rémunération Ω^C qui associe à chaque niveau de $k \neq k^*$, un nombre non nul de chercheurs dont la contribution marginale sera supérieure ou inférieure à cette valeur critique. Dans l'exemple hypothétique du déséquilibre considéré ci-dessus, ceux parmi les chercheurs qui auraient une contribution marginale supérieure à la valeur critique iraient dans le secteur de la recherche Hors-TIC et ceux qui auraient une contribution inférieure à la valeur critique iraient dans le secteur TIC.

En effet en réécrivant le déséquilibre comme: $\frac{k}{(1 + \Omega)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}} < k^*$, on voit mieux que les

chercheurs qui ont le plus grand Ω , tendront à augmenter le ratio $\frac{k}{(1 + \Omega)^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}}$ lorsque

l'élasticité de substitution est inférieure à l'unité. Ainsi, lorsque k devient de plus en plus proche de son niveau d'équilibre, le nombre S_{htick} de chercheurs requis par le secteur Hors-TIC devient de moins en moins élevé. De cette façon, il n'y a plus cessation complète d'activité de recherche dans le secteur TIC mais simplement réallocation des chercheurs en fonction de k .

Le nombre de chercheurs S_{htick} qui se destinent au secteur Hors-TIC est ainsi relié négativement et continûment à l'intensité capitaliste de l'économie k :

$$S_{htick} = f^+ \left(\Delta(k) \right)$$

Le signe positif de la relation provient donc de la relation inverse qui existe entre la part relative du capital ou du travail (ou le poids relatif du secteur Hors-TIC ou TIC) et l'intensité capitaliste (ou abondance relative des biens Hors-TIC ou TIC) lorsque l'élasticité de substitution entre les deux biens est inférieure à l'unité. Sinon, la relation serait évidemment de signe négatif si l'élasticité de substitution était supérieure à un.

⁴² Partir de l'équation (28) puis remplacer b par $(1 + \Omega)b$.

Lorsque k est égal à son niveau d'équilibre k^* , le nombre de chercheurs se trouvant dans le secteur Hors-TIC se maintient au niveau S_{htick}^* . En effet, dans ce cas, $\Delta(k)$ ne varie pas et S_{htick} qui en dépend, ne varie pas non plus. Tenant compte de cette relation, il devient alors possible de transformer légèrement l'équation (31) à l'origine de la discontinuité préjudiciable à une linéarisation:

$$(32) \quad \frac{\dot{M}}{M} = \frac{1-\beta}{\beta} (b_k \Delta(k) - \delta)$$

Etant donné que l'équation (31) influait sur l'équation (29), la modification intervenue dans la première modifie la seconde qui se réécrit désormais:

$$(33) \quad \frac{\dot{k}}{k} = M \left[\gamma k^{-\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (1-\gamma) \right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} - c - \left[\frac{1-\beta}{\beta} (b_{tick} S - (b_{tick} + b_{htick}) \Delta(k)) \right]$$

Si nous ajoutons à ces deux équations, l'équation (30) qui elle n'est pas concernée par le changement opéré, nous obtenons le nouveau système {(30),(32) et (33)}.

Ce système est linéarisable car parfaitement déterminé (3 variables, 3 inconnues).

Sa vraisemblance dépend de la densité de $\Gamma(\Omega)$. Il est différent du système {(29),(30),(31)} dès l'instant que la densité de $\Gamma(\Omega)$ est différente de 0. Si le choix de la fonction de répartition est fondé, il n'y a pas de raisons de se retrouver avec une densité nulle. Schématiquement, cela signifie que si le choix d'une fonction de répartition comptant à titre d'exemple une dizaine de valeurs pour la variable aléatoire Ω , est tel que les 9 ont une densité $\Omega_1, \Omega_2 \dots \Omega_9 \neq 0$, on s'éloigne davantage du système de {(29),(30) et (31)} en réduisant la discontinuité que dans le cas du choix d'une fonction de répartition telle que 9 des valeurs de la variable aléatoire Ω possèdent une densité nulle (même si l'on réduit la discontinuité par rapport au système (29),(30) et (31)).

La preuve de la plus grande vraisemblance du système {(30),(32) et (33)} est ainsi approchée, puisqu'il suffit que le choix d'une fonction de répartition des rémunérations aléatoire présente au moins un point de densité non nulle.

En effet un tel point divisera la population des chercheurs en deux groupes à productivités différentes permettant ainsi au mouvement des chercheurs de se faire un peu plus continûment selon le rendement requis par l'invention.

Notons au passage à titre de rappel que tous les chercheurs avait été supposés avoir une même productivité, certes différente mais seulement selon le secteur considéré. Cependant, plus la variabilité des rendements requis par l'innovation est importante et plus les densités de la fonction de répartition des rémunérations aléatoires doivent être fortement hétérogènes si l'on veut garantir une réelle continuité dans l'allocation des chercheurs.

6.2 Linéarisation du nouveau système d'équations différentielles

6.2.1 Ecriture matricielle du système

Présenté à l'ordre n , le développement limité de Taylor qui permet d'approximer une fonction $f(x)$ autour d'un point x^* s'écrit, pour rappel, de la manière suivante:

$$f(x) = f(x^*) + (df/dx)|_{x^*} (x - x^*) + (d^2 f/dx^2)|_{x^*} (x - x^*)^2 \left(\frac{1}{2!}\right) + \dots + (d^n f/dx^n)|_{x^*} (x - x^*)^n \left(\frac{1}{n!}\right) + R_n$$

avec $R_n = (x - x^*)^n R(x - x^*)$, le résidu de Taylor-Young qui comme usuellement est d'autant plus faible que l'ordre n de l'approximation est élevé et que le système est proche de l'état stationnaire (x proche de x^*)⁴³.

Nous considérons le système représenté par les équations différentielles (30), (32) et (33) dont nous cherchons un développement limité d'ordre 1:

$$\begin{cases} \dot{c}_t = c^1[c_t, k_t, M_t] \\ \dot{k}_t = k^1[c_t, k_t, M_t] \\ \dot{M}_t = M^1[c_t, k_t, M_t] \end{cases}$$

La linéarisation de ce système autour des points d'équilibre (c^*, k^*, M^*) et à l'ordre 1 et en négligeant le reste de Taylor-Young, donne:

$$\begin{aligned} \dot{c}_t &= c^1(c^*, k^*, M^*) + (dc^1/dc)|_{c^*} (c - c^*) + (dc^1/dk)|_{k^*} (k - k^*) + (dc^1/dM)|_{M^*} (M - M^*) \\ \dot{k}_t &= k^1(c^*, k^*, M^*) + (dk^1/dc)|_{c^*} (c - c^*) + (dk^1/dk)|_{k^*} (k - k^*) + (dk^1/dM)|_{M^*} (M - M^*) \\ \dot{M}_t &= M^1(c^*, k^*, M^*) + (dM^1/dc)|_{c^*} (c - c^*) + (dM^1/dk)|_{k^*} (k - k^*) + (dM^1/dM)|_{M^*} (M - M^*) \end{aligned}$$

Ce qui s'écrit de façon équivalente en prenant le logarithme et passant sous notation matricielle (sans tenir compte de l'indice temporel ni de l'exposant d'ordre 1 pour alléger l'écriture):

$$\begin{pmatrix} \dot{c} \\ \dot{k} \\ \dot{M} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{cc} & a_{ck} & a_{cM} \\ a_{kc} & a_{kk} & a_{kM} \\ 0 & a_{Mk} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ k \\ M \end{pmatrix}$$

où les constantes $a_{..}$ correspondent aux dérivées partielles des équations du système (30), (32) et (33) calculées à l'état régulier.

⁴³ Pour un exemple où l'augmentation de l'ordre améliore l'approximation jusqu'à la rendre identique à la fonction approchée, prenons l'approximation de x^3 autour de 1 et à l'ordre 2. En passant à l'ordre 3, le reste de Taylor-Young s'annule. Passer d'un ordre 2 à 3 a donc rendu parfaite l'approximation.

6.2.2 Etude des signes des dérivées partielles et calcul du déterminant de la matrice gradient

Les propriétés de stabilité de ce système matriciel vont dépendre du signe de ses valeurs propres η . Mais le signe de ces valeurs propres dépendra naturellement des signes des dérivées partielles qu'il s'agit dans un premier temps de déterminer.

L'observation de chacune des équations permet d'avoir aisément, la plupart du temps du moins, les signes de ces constantes :

(30) montre ainsi que $a_{cc} = 1 > 0$, $a_{ck} < 0$ (nous rappelons que c est la consommation "normalisée" qui diminue lorsque l'intensité capitaliste augmente)

Le signe de a_{cM} n'est pas immédiat.

$$a_{cM} = \theta \beta (1 - \lambda) \left[\gamma (k^*)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (1 - \gamma) \right]^{\frac{1}{\varepsilon-1}} - \left[\gamma (k^*)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (1 - \gamma) \right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}}$$

D'une part le premier terme de l'équation (30) montre que la consommation normalisée augmente avec M mais le second terme montre le contraire.

Ce signe semble indéterminé. Passons à l'équation (32) :

$a_{Mk} < 0$ compte tenu du signe de $\Delta(k)$. Lorsque l'élasticité de substitution est inférieure à 1, une plus grande quantité de biens intermédiaires intensifs en capital réduit la part relative du capital, et donc l'incitation à l'invention de nouveaux biens intermédiaires intensifs en capital.

$$a_{Mc} \text{ et } a_{MM} = 0$$

Enfin, l'équation (33) :

$$a_{kc} = -1 < 0, a_{kM} = \left[\gamma (k^*)^{\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}} + (1 - \gamma) \right]^{\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}} > 0 \text{ et } a_{kk} < 0 \text{ compte tenu du signe de } \Delta(k) \text{ et d'une élasticité de substitution inférieure à 1.}$$

En utilisant l'expression de a_{kM} , l'indétermination du signe de a_{cM} et en appelant

a_{cM}^+ le premier terme positif de la dérivée partielle a_{cM} , on a :

$$a_{cM} = a_{cM}^+ - a_{kM} \text{ (l'avantage étant que sans connaître directement le signe de } a_{cM}^+, \text{ nous en identifions et connaissons néanmoins les signes de ses composants, ce qui peut être utile pour la suite)}$$

A ce stade, on introduit les valeurs propres dont nous cherchons également les signes. Soit I , la matrice identité.

Pour trouver, les trois valeurs propres, il faut résoudre le polynôme caractéristique $P(\eta)$ du gradient ($Grad$) (matrice des dérivées partielles premières) d'ordre 3 :

$$P(\eta) = \det(Grad - I\eta) = 0 \Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} a_{cc} - \eta & a_{ck} & a_{cM} \\ a_{kc} & a_{kk} - \eta & a_{kM} \\ 0 & a_{Mk} & a_{MM} \end{bmatrix} = 0$$

L'application de la règle de Sarrus⁴⁴, adaptée aux calculs de déterminants de matrices d'ordre 3 nous permet d'écrire l'équation suivante:

$$-\eta^3 + \eta^2(a_{cc} + a_{kk}) - \eta(a_{cc}a_{kk} + a_{kM}a_{Mk} - a_{ck}a_{kc}) + a_{cM}a_{kc}a_{Mk} = 0$$

En factorisant par $-\eta^3$, on a:

$$-\eta^3 \left(1 - (a_{cc} + a_{kk}) \frac{\eta^2}{\eta^3} + (a_{cc}a_{kk} + a_{kM}a_{Mk} - a_{ck}a_{kc}) \frac{\eta}{\eta^3} \right) = -a_{cM}a_{kc}a_{Mk}$$

$$\eta^3 = \eta_1\eta_2\eta_3 = a_{cM}a_{kc}a_{Mk}$$

Or $a_{cM} = a_{cM}^+ - a_{kM}$, ce qui en remplaçant et en développant dans l'expression ci-dessus donne:

$$\eta_1\eta_2\eta_3 = a_{cM}^+ a_{kc}a_{Mk} + a_{kM}a_{kc}a_{Mk}$$

Et comme, l'étude précédente l'avait montré ($a_{kc} < 0, a_{Mk} < 0$ et $a_{kM} > 0$), le produit des trois valeurs propres est positif, ce qui implique que l'on doit avoir:

- soit les trois valeurs propres toutes positives
- soit une valeur propre positive et deux négatives

S'il en est ainsi, le nouveau système est localement stable lorsque l'élasticité de substitution est inférieure à 1.

En reprenant la même démarche et en travaillant avec une élasticité de substitution supérieure à l'unité, on obtient :

$\eta_1\eta_2\eta_3 = a_{cM}^+ a_{kc}a_{Mk} + a_{kM}a_{kc}a_{Mk} < 0$ ce qui est incompatible avec l'annulation du déterminant. En conséquence, le nouveau système ne serait pas localement stable.

7. Révision d'une des hypothèses du modèle : La frontière des possibilités d'innovation

Dans ce modèle la croissance équilibrée ne serait plus possible dès lors que prend en compte l'hypothèse de *spillovers* intersectoriels que renferment les équations (8) à savoir les frontières de possibilités d'innovations.

Comme il a déjà été souligné, ces équations contiennent trois informations:

D'abord, l'invention de biens dans le secteur tic ou dans le secteur hors tic nécessite l'utilisation d'un facteur rare : le "scientifique".

⁴⁴ Il suffit d'ajouter de nouveau les deux premières lignes du *Grad* au bas des trois lignes initiales.

Ensuite on multiplie toutes les diagonales de gauche à droite qu'on additionne et de droite à gauche qu'on additionne aussi. Enfin, on prend la différence entre les deux sommes (droite moins gauche).

Le signe obtenu est celui du déterminant.

Ensuite, et en lien avec la première information, des "*spillovers*" de la recherche passée vers le présent permettent, comme dans toutes les formulations utilisant du facteur rare, de soutenir la croissance à long terme.

Enfin, ces "*spillovers*" de la recherche passée se produisent sous une forme particulière: Une invention dans un secteur donné, par exemple le secteur des biens intermédiaires intensifs en capital, impactait sur la productivité des chercheurs dans ce secteur, eu égard à la deuxième information ci-dessus, mais n'avait aucun impact sur celle des chercheurs de l'autre secteur.

On reconnaît là, la notion de "*state dependance*" lorsque la productivité relative d'un secteur par rapport à un autre dépend uniquement de l'état des productivités.

Ainsi, lorsque le système étudié comporte m produits du secteur hors tic et n produits du secteur tic, la productivité relative dans chaque secteur dépend de l'état $\{m, n\}$.

Supposons l'invention d'une unité du produit du secteur hors tic:

le système passe à $\{m+1, n\}$ et la productivité relative dans chaque secteur dépend de l'état $\{m+1, n\}$. On perçoit bien l'idée de la "*state dependance*".

Le nombre de produits n , n'a pas évolué en présence d'une augmentation de productivité dans le secteur hors tic.

La productivité relative des chercheurs dans le secteur hors tic a augmenté proportionnellement à l'invention.

Elle aurait augmenté moins que proportionnellement si un quelconque effet intersectoriel était apparu ou plus précisément, était pris en compte.

7.1 Relâchement de l'hypothèse de "state dependance" et l'impossibilité de croissance équilibrée

Lorsqu'il n'y a plus de "*state dependance*" entre les deux secteurs de la recherche, on ne peut plus retrouver le régime de croissance équilibrée. Nous montrons dans un premier temps comment un tel résultat peut se démontrer et se comprendre.

Pour cela, il est nécessaire d'introduire la modification de l'hypothèse de "*state dependance*" au niveau des équations (8), ce qui amène aux formulations suivantes:

$$(8)' \quad \dot{n} = b_{ticl} n^{\nu} m^{1-\nu} S_{ticl} - \delta n \quad \text{et} \quad \dot{m} = b_{htick} n^{\nu} m^{1-\nu} S_{htick} - \delta m$$

Dans les équations (8)', on s'aperçoit que les deux premières informations évoquées plus haut demeurent mais que celle relative à l'existence d'une "*state dependance*" est occultée.

Ainsi on peut affirmer que désormais, l'invention dans un des deux secteurs qui consiste pour rappel à augmenter n ou m , génère des effets sur la productivité absolue de l'autre secteur.

Les productivités relatives dans chaque secteur sont alors modifiées dès lors que le passage d'un état à l'autre envisage des *spillovers* intersectoriels.

Se pose à ce stade la question suivante: Une telle formalisation de la recherche autorise-t-elle la croissance équilibrée ? Il fallait démontrer que le régime ne peut plus se retrouver équilibré. En voici la démonstration et l'intuition:

Comme pour le modèle de base, le régime de croissance équilibrée implique que la contribution marginale maximale des "scientifiques" à la valeur de l'invention d'un

bien TIC devienne égale à cette valeur de l'invention d'un bien Hors-TIC, ce qui tenant compte de (8)' se matérialise par :

$$w_s = \max \{ b_{ticl} n^\nu m^{1-\nu} V_{ticl}, b_{htick} n^\nu m^{1-\nu} V_{htick} \} \quad (\text{par analogie avec l'équation (21)})$$

Ce qui équivaut à l'équilibre de long terme à ce que:

$$(21)' \quad b_l V_{ticl} = b_{htick} V_{htick}$$

Cette condition ressemble à celle qui avait permis de trouver la condition de non-arbitrage dans le modèle de base. Mais elle n'est pas exactement la même.

Cette dernière avait permis d'écrire à partir de la part relative d'équilibre du capital (elle-même réécrite comme (26) et de (22)) d'exprimer cette part relative d'équilibre du capital en fonction des paramètres du modèle (équation (27)).

Rappelons les différentes expressions qui permettront d'expliciter l'équation (21)':

$$\text{La part relative du capital était: } \sigma_K = \frac{rK}{wL}$$

$$\text{L'équation (27) était: } \sigma_k = \frac{b_{ticl} (1-\beta)(\rho + \delta + (\theta-1)g)}{b_{htick} ((1-\beta)(\rho + \delta) + ((1-\beta)(\theta-1) + \beta)g)} = b$$

En remplaçant la part relative du capital par sa valeur, l'équation (27) pourrait se reformuler de la manière suivante:

$$b_{htick} rK = b_{ticl} wL = \frac{(1-\beta)(\rho + \delta + (\theta-1)g)}{((1-\beta)(\rho + \delta) + ((1-\beta)(\theta-1) + \beta)g)}$$

L'équation (27) avait été obtenue grâce à la combinaison de l'hypothèse de libre entrée dans la recherche et des équations (22) qui sont les valeurs d'invention d'un bien tic et d'un bien Hors-TIC. L'hypothèse de libre entrée se traduisait par:

$$b_{ticl} n V_{ticl} = b_{htick} m V_{htick}$$

On peut s'intéresser uniquement aux deux termes de la double égalité ci-dessus et en comparant l'hypothèse de libre entrée $b_{ticl} n V_{ticl} = b_{htick} m V_{htick}$ avec la nouvelle soit l'équation (21)', on peut écrire comme suit la nouvelle condition de non-arbitrage:

$$(27)' \quad b_{htick} \frac{rK}{m} = b_{ticl} \frac{wL}{n}$$

En croissance équilibrée, nous savons qu'il était requis que le taux de l'intérêt demeurât constant, ce qui *in fine* imposait de ne pas avoir de progrès technique net dans le secteur des biens Hors-TIC, soit donc $\dot{m} = 0$.

Par ailleurs w, n et K devaient croître au taux identique g . Ces observations appliquées à l'équation (27)' montrent bien l'impossibilité d'obtenir une croissance équilibrée dans un système occultant la question de la "state dependance".

En effet pour que l'équation (27)' - qui correspond à ce qu'il doit en être lorsque l'on se trouve en régime de croissance équilibrée sans "state dependance"- tienne, et compte tenu de ce que w, n et K croissent toutes au taux identique g , il est indispensable que m fasse autant.

Par conséquent la croissance ne peut être équilibrée, puisque $\dot{m} \neq 0$ mais seulement régulière car dès que l'on admet une croissance de m , le taux d'intérêt cesse d'être constant, ce qui compte tenu de l'équation (9) rendrait la croissance de la consommation différente.

Si nous supposons en revanche un taux de croissance constant de m , on peut avoir un taux d'intérêt évoluant constamment et un régime de croissance mais seulement régulière puisque toutes les variables n'évolueraient pas à un taux identique.

Une telle perspective n'apporte pas d'enseignements sur l'évolution future des TIC.

En résumé, un régime de croissance équilibrée ne peut exister qu'avec du progrès technique neutre au sens de Harrod. L'intuition d'un tel résultat n'est pas nouvelle sauf en ce qu'elle met en exergue le rôle de la notion de "state-dependance":

Lorsque que l'on admet que le progrès technique puisse laisser m évoluer, il faudrait toujours que la profitabilité liée au secteur intensif en capital soit égale à celle de l'autre secteur (condition de non-arbitrage).

Ce faisant la recherche pourra se faire uniquement dans le secteur intensif en travail. Mais et ce n'est pas une nouveauté, l'accumulation du capital (et l'impossibilité d'accumulation du travail) favorise relativement plus le secteur intensif en capital et transite *via* les *spillovers*, créant ainsi un différentiel de productivité en faveur du secteur intensif en capital (puisque m augmente aussi).

Dès lors, tant que ce différentiel de productivité n'est pas compensé par du progrès technique en direction du secteur intensif en travail, la profitabilité ne saurait être la même dans les deux secteurs. Les *spillovers* intersectoriels ne doivent donc pas avoir lieu, ce qui s'obtient par l'implémentation de l'hypothèse de "state dependance"

7.2 Prise en considération d'une "state dependance" asymétrique

On cherche à montrer que la conclusion du modèle vaut également aussi bien dans l'hypothèse d'une "state dependance" symétrique que dans l'hypothèse d'une "state dependance" asymétrique du secteur intensif en travail vers le secteur intensif en capital ou l'inverse.

Dit autrement, il n'y aura pas de régime de croissance équilibrée lorsque l'on considère l'existence de *spillovers* nets bénéficiant au secteur TIC ou de *spillovers* nets bénéficiant au secteur Hors-TIC.

Nous montrons l'impossibilité lorsqu'on se trouve dans le second cas.

Quant au premier, étant donné que le régime de croissance équilibrée exclut que m puisse augmenter, il n'est pas plausible de considérer l'existence de quelconque effets en provenance du secteur intensif en capital.

Le régime équilibré dans ce modèle est contraignant.

Si les *spillovers* pouvaient être différenciés, on pourrait modifier l'équation (8)' de telle sorte que l'on fasse apparaître uniquement les *spillovers* nets.

Cela permettrait donc de ne modifier que l'une des équations (8)' à savoir celle du secteur des biens Hors-TIC comme suit:

$$(8)'' \quad \dot{n} = b_{ticl} n S_{ticl} - \delta n \quad \text{et} \quad \dot{m} = b_{htick} n^v m S_{htick} - \delta m$$

Les formulations (8)'' gardent comme dans le modèle initial l'existence de *spillovers* de la recherche passée mais introduisent un changement par rapport aux externalités intersectorielles. Celles-ci sont en effet des externalités intersectorielles nettes qui jouent en faveur d'une augmentation du nombre de biens intermédiaires Hors-TIC mais dont la source provient du rythme plus élevé de progrès du secteur TIC.

Au lieu de considérer que le secteur Hors-TIC ne génère pas d'externalités en direction du secteur TIC, on peut concevoir autrement la question. On peut dire que la source d'amélioration des performances des produits tic génère un effet positif bien entendu dans le secteur tic mais son importance est telle qu'elle compense les externalités en provenance du secteur Hors-TIC, ce qui explique que nous retrouvons le terme n^v dans l'équation de la frontière d'innovation du secteur hors tic.

Une des importantes limites des modèles de croissance néoclassique dans la lignée du modèle de Solow, réside non seulement dans le fait que les gains de performance intra sectoriels apparaissent sans coûts, mais également que ces gains sont gratuits lorsqu'elles ont une source extra sectorielle donc les externalités.

La première limite est levée dans le cadre de ce modèle, puisque l'activité de recherche est coûteuse et est rémunérée par des brevets achetés par le secteur producteur de biens intermédiaires.

La deuxième limite souligne que les externalités difficiles à mesurer doivent cependant rémunérer le secteur qui en est à l'origine et le secteur qui en bénéficie: Le salaire des chercheurs des deux secteurs augmenterait donc de ce fait.

$$(21)'' \quad w_s = \max \{ b_{ticl} n V_{ticl}, b_{htick} n^v m V_{htick} \} \quad (\text{par analogie avec (21)})$$

En comparant (21)'' à (21), on peut remarquer que la nouveauté concerne la présence du terme n^v qui représente l'effet net positif du secteur tic vers les autres secteurs. La nouvelle condition de non-arbitrage devient:

$$(27)'' \quad b_{ticl} \frac{wL}{n} = b_{htick} \frac{n^v rK}{m}$$

L'équation (27)'' est incompatible avec l'existence d'un régime de croissance équilibrée. En effet, en croissance équilibrée, il est requis que m reste constant et que w, n et K croissent au même taux.

Pour qu'elle soit vérifiée, l'équation (27)'' implique qu'alors m doive non seulement augmenter mais le faire d'autant plus que les *spillovers* nets en provenance du secteur TIC se font à un rythme important.

Conclusion

Comment approcher l'évolution de la contribution du secteur TIC à la croissance et de façon générale de tous les biens et services qui améliorent la productivité du travail, dans un cadre théorique endogène débarrassé des *a priori* des modèles de croissance comportant une fonction de production Cobb-Douglas ou partant de l'hypothèse d'un progrès technique neutre au sens de Harrod ?

A cette fin, ce chapitre devait donc répondre à deux interrogations interdépendantes : Comment envisager une modélisation capable de reproduire la stabilité des parts factorielles dans le revenu sans recourir à des *a priori* (Cobb-Douglas, hypothèse de neutralité harrodiennne) et en rendant le progrès technique endogène ?

Comment dans le même temps tenter d'en inférer une proposition quant aux effets contributifs futurs de la diffusion des produits tic dans une économie ?

Et alors obtenir les conditions endogènes (comportement maximisateur dans l'innovation, biais de progrès technique) et exogènes (élasticité-prix et élasticité de substitution) qui expliciteraient l'apport contributif de ces produits (constant, croissant ou décroissant) à la croissance économique dans le temps.

Notre idée est que dans le cas où la diffusion des TIC dans une économie arriverait à détériorer l'élasticité-prix de la demande de ces biens, la productivité du travail s'en trouverait si améliorée que la profitabilité liée à l'invention de biens Hors-TIC serait relativement plus élevée. A ce moment, le progrès technique étant endogène et dans un contexte d'élasticité inférieure à un, on assiste à un rééquilibrage autour d'une condition de non-arbitrage sur la direction du progrès technique. Cette condition de non-arbitrage, nous l'avons montré, équivaut à une "intensité capitaliste d'indifférence" de l'économie ou ce qui revient au même à un poids relatif du capital par rapport au travail qui est représentatif de la situation de non-arbitrage.

A l'origine de ce raisonnement, il y a une relation négative entre l'abondance relative des biens TIC dans l'économie et leur profitabilité financière que nous avons mise en évidence lorsque l'élasticité-prix de la demande est inférieure à 1.

Sur la base de cette relation négative, le progrès technique qui est endogène s'oriente vers les biens Hors-TIC et en cas de succès augmente leur nombre ou éventuellement leur abondance relative. Cette dernière étant elle-même liée négativement à leur profitabilité, on se retrouve avec un mécanisme rééquilibrant les poids de chaque facteur de production dans le PIB, en réponse aux abondances relatives des biens de l'économie.

Ces relations sont au cœur de la prédiction que nous ferons sur le lien entre diffusion des TIC et poids futur des TIC dans le PIB. On en reparle un peu plus en avant.

Un premier résultat a permis de confirmer que dans le long terme, le progrès technique est neutre harrodien, ce qui maintient constant le poids relatif du capital. En effet, la formalisation retenue met clairement en lumière une double source permettant d'améliorer la productivité du capital : l'accumulation du capital et le progrès technique en direction du capital alors qu'il n'y a que le progrès technique en direction du travail pour améliorer la productivité de ce dernier.

Dans ce modèle le moteur de la croissance réside dans l'introduction de biens intermédiaires TIC qui améliorent la productivité du travail et de biens intermédiaires Hors-TIC qui améliorent celle du capital.

L'abondance relative de l'un ou l'autre dans l'économie implique, selon une logique maximisatrice des profits, un changement de direction du progrès technique qui à son tour engendre une modification du poids relatif de la rémunération du capital par rapport à celle du travail.

Lorsque l'élasticité de substitution entre les produits TIC et les produits Hors-TIC est inférieure à l'unité et que le nombre de produits TIC présents dans l'économie est plus important que le nombre de produits Hors-TIC, la part factorielle des produits Hors-TIC est alors trop élevée.

En effet tel que la montrent les équations des profits dans la recherche, l'introduction des produits TIC améliore la productivité du travail (augmentation des salaires), réduit l'emploi mais encore plus fortement du fait de l'existence d'un effet *spillover* de la recherche passée qui ajoute une amélioration gratuite de la productivité.

Au total l'effet est générateur de diminution relative de la part des coûts salariaux.

Or à l'équilibre (la référence à l'équilibre traduit le caractère local du raisonnement) la part relative des salaires procédait de ce que les firmes de la recherche étaient indifférentes entre une orientation du progrès vers les produits TIC ou Hors-TIC. Le progrès s'oriente donc vers les produits Hors-TIC, devenus relativement plus coûteux et ramène la part factorielle relative des produits Hors-TIC à son niveau antérieur.

Le retour à une proportion d'équilibre entre les différents produits assure une contribution de chacun d'entre eux à la croissance qui est unique car correspondant à une contribution relative constante des produits TIC par rapport aux produits Hors-TIC. Dit autrement, à long terme, le poids des produits TIC par rapport aux produits Hors-TIC demeure fixe et stable relativement (pas absolument). Mais c'est bien le caractère fixe et stable en termes relatifs qui permet d'affirmer que la contribution des produits TIC à la croissance ne dérive pas complètement lorsque l'élasticité de substitution est inférieure à l'unité.

Un résultat émerge par rapport au poids des produits TIC dans l'économie et qui peut se résumer ainsi:

Le rôle crucial de l'élasticité de substitution dans la prédiction de l'apport futur des TIC à la croissance qui est suggéré par Oulton.N [2002] demeure dans l'analyse.

Ce n'est pas pour autant le seul déterminant. L'antériorité revient à la condition de non-arbitrage (profits des entreprises de la R&D) sur les profits liés à l'activité de recherche dans l'un ou l'autre secteur.

Lorsque les profits dégagés dans le secteur TIC sont les mêmes que ceux des autres secteurs, la part relative des produits TIC ou Hors-TIC est unique et stable pour une configuration donnée de l'économie. En conséquence, la contribution de ces produits à la croissance l'est aussi dès lors que l'élasticité de substitution est déjà dégradée (<1) puisque le mécanisme ramène vers une proportion constante des différents biens dans l'économie.

Au regard du questionnement de Oulton.N sur l'avenir de la contribution des produits tic à la croissance et compte tenu de nos explications précédentes nous pouvons proposer la description effets en jeu suivants.

Ils permettent d'ébaucher une réponse qui sans exclure les variables exogènes de Oulton.N à savoir l'élasticité-prix de la demande de produits TIC et l'élasticité de substitution entre ces produits et les hors-tic,introduit de nouveaux éléments.

D'après Oulton.N,la dégradation de l'élasticité-prix de la demande de produits TIC actuellement supérieure à l'unité,si elle se confirmait mènerait vers une contribution de plus en plus modeste de ces produits à la croissance économique.Mais selon nous,la dégradation de l'élasticité-prix de la demande de produits TIC reflèterait dans le même temps une détérioration de l'élasticité de substitution entre ces produits et les produits Hors-TIC.

Et une fois entrés dans la phase où la substitution devient faible,le modèle utilisé montre que l'induction du progrès technique selon une logique maximisatrice de profits dans le secteur de la recherche,est en mesure d'amortir voire de stopper la baisse continue de la contribution des produits TIC.

En cela les rémunérations factorielles relatives peuvent se modifier transitoirement, mais elles sont alors ramenées vers leur niveau d'équilibre donc vers une contribution stable à la croissance équilibrée.Il n'y a donc pas de dérive continue de la rémunération d'un des deux facteurs dans la croissance.

Le moment du basculement d'une élasticité supérieure à l'unité vers une élasticité inférieure à un est le même moment où le progrès technique commence à jouer le rôle d'amortisseur puis d'équilibreur de la dérive contributive de ces produits à la croissance.La dégradation de l'élasticité qui résulterait d'une saturation progressive de l'économie en produits TIC engendre elle-même des forces de rappel qui sont de nature à assurer la stabilité du système.

Observons pour finir quelques aspects ou limites inhérents à cette analyse et qui pourraient faire l'objet d'extensions ou d'améliorations:

On a introduit une relation dynamique entre la part relative du capital,l'abondance relative des produits Hors-TIC et l'élasticité de substitution (ε) entre les deux biens.

Le lien supposé entre l'abondance absolue des TIC (respectivement Hors-TIC) et la variation de la productivité du travail (respectivement du capital) n'est pas immédiatement indiscutable.En effet,les déterminants de l'évolution de la productivité du travail,donc de la rémunération du travail ne sont pas l'apanage exclusif des TIC.Cela est à nuancer selon que l'on s'intéresse à l'influence des TIC sur la productivité du travail sur une période de temps donnée (idée de stock) ou sur l'influence de la variation contributive des TIC sur la variation de la productivité du travail entre deux périodes données (idée de flux).La modélisation traite des flux.

Sur la période 1980-2000 la contribution empirique annuelle moyenne des TIC à la productivité du travail en France de 30%.Sur une période plus réduite correspondant à une diffusion plus aboutie des TIC,soit 1995-2000,ce chiffre est déjà plus intéressant puisqu'il se situe d'après nos calculs à 45%.Sur cette même période mais pour les Etats-Unis,Jorgenson.D.W,Ho.M.S et Stiroh.K.J [2008],trouvent 59%.

Lorsque l'on s'intéresse maintenant à la contribution des TIC à l'évolution de la productivité du travail entre deux périodes (flux),la remarque gagne en pertinence.En

effet, considérant la période [1973-1995] et [1995-2000], ces auteurs montrent clairement (voir page 14 et table 1 page 34) une contribution des TIC à l'accroissement de la productivité du travail équivalente à 80%.

La réponse à l'interrogation de Oulton.N sur l'apport futur des TIC à la croissance a été développée dans un cadre endogène. Elle montre que des processus microéconomiques débordant les seules élasticités ont aussi un rôle à jouer dans la prévision.

La portée empirique de cette modélisation reste néanmoins assez restreinte pour 3 raisons:

Les sources de variations de la productivité du travail sont un peu plus diffuses que celle que la modélisation leur a donné. Mais cela n'est pas gênant, un raisonnement " toutes choses restant égales par ailleurs " peut aider.

Elle a trait également au caractère local de la stabilité de l'équilibre trouvé. On terminera par ce point qui pourrait redonner à ce modèle une capacité de prédiction empirique. Cela peut constituer une piste de recherche empirique.

Enfin elle s'explique surtout par la nature qualitative de l'objectif. On ne cherche à aucun moment à établir des prévisions chiffrées sur le poids futur des TIC dans la croissance mais à savoir si la diffusion des TIC pourrait se prolonger continûment.

De cette troisième raison, il peut sembler que réponse à l'interrogation de Oulton.N reste un peu muette sur le fait de savoir si en cas de diffusion continue des TIC, le poids de ceux-ci baissera ou non dans le PIB. Elle affirme cependant que cette diffusion ne saurait être continue, puisqu'elle génère elle-même les forces de rappel (dégradation de l'élasticité et progrès technique endogène) qui la contrecarreront. Cela laisse quasiment sans objet le second terme de l'interrogation de Oulton.N qui nous semble moins discutable.

Enfin, en pratique, on pourrait vouloir connaître l'équilibre local. On pourrait à cet effet, trouver l'intensité capitaliste d'indifférence théorique de l'économie qui permettrait par comparaison avec la même intensité empirique de conjecturer sur la direction du progrès technique et donc sur le poids des biens TIC dans la croissance.